Mathématiques

Plus de complexes !

Hélène Lapeyre, Jean-Pierre Siau
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Jacques Amyot (Melun).

Si l'utilisation des nombres complexes est désormais pour vous (presque) familière, l'existence et la construction de tels nombres sont restés pendant de nombreux siècles des questions fondamentales pour les algébristes et géomètres, jusqu'à leur résolution dans leur forme actuelle au XIX^e siècle. Ce sont des algébristes italiens de la fin du XVI^e siècle, Cardan, Ferrari et Bombelli (1572), qui vont les premiers manipuler, avec beaucoup de précautions, des racines carrées de nombres négatifs, pour résoudre des équations des 3^e et 4^e degrés. Au XVII^e siècle se généralise l'utilisation de ces nombres, mais leur existence reste mystérieuse, et ils sont qualifiés d'imaginaires par Descartes (1637). Les grands mathématiciens du XVIII^e siècle, Lagrange, Laplace, D'Alembert s'attacheront à démontrer l'un des plus célèbres théorèmes de mathématiques : tout polynôme de degré n admet n racines . Mais c'est seulement Gauss (1777-1854), au début du XIX^e siècle, qui donnera une preuve définitive de ce théorème et une construction géométrique rigoureuse de ces nombres, qu'il baptise nombres complexes (1831). La définition algébrique de l'ensemble des nombres complexes est due à Hamilton (1805-1865) qui, en voulant généraliser cette construction, créera d'autres nombres bien étranges eux aussi, appelés quaternions, mais cela est une autre histoire...

Nous vous proposons ici un cocktail assez corsé d'exercices et de problèmes sur les nombres complexes. Si certains vous semblent difficiles, ne vous découragez pas ; le bref historique précédent vous montre, qu'avec le temps, les questions les plus difficiles trouvent une solution. Alors abordez les complexes... sans complexes !

Quelques remarques pratiques : si vous souhaitez travailler sur des exercices de colle, attaquez les exercices 1 à 6 ; les exercices 7 et 8 ont essentiellement un intérêt historique. Amateurs de problèmes, les exercices 9 à 11 sont pour vous (les numéros 8 et 9 étant deux versions d'un même problème, l'une pour les étudiants de deuxième année, l'autre pour ceux de première année).

H. L. - J.-P. S.

Quelques exercices de colle “classiques”

Exercice 1 : exercice sur l’inégalité triangulaire

1. *Montrer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, que*

$$|u| + |v| \le |u+v| + |u-v|$$

2. *En déduire, pour tout $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$:*

$$\sum_{i=1}^{4} |z_i| \le \sum_{1 \le i < j \le 4} |z_i + z_j|$$

Solution de l’exercice

1. D’après l’inégalité triangulaire,

$$|u+v| + |u-v| \ge |2u|$$

$$|u+v| + |v-u| \ge |2v|$$

En ajoutant ces deux inégalités, en remarquant que $|u-v| = |v-u|$, et en divisant par 2, on obtient :

$$\boxed{|u| + |v| \le |u+v| + |u-v|}$$

2. D’après la question précédente,

$$|z_1| + |z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$$

$$|z_3| + |z_4| \le |z_3 + z_4| + |z_3 - z_4|$$

Donc, par sommation,

$$\sum_{i=1}^{4} |z_i| \le |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| + |z_3 + z_4| + |z_3 - z_4|$$

D’après la question précédente,

$$|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4| \le |(z_1 + z_3) - (z_2 + z_4)| + |(z_1 + z_4) - (z_2 + z_3)|$$

D’après l’inégalité triangulaire,

$$|(z_1 + z_3) - (z_2 + z_4)| \le |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4|$$

$$|(z_1 + z_4) - (z_2 + z_3)| \le |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3|$$

Par transitivité,

$$\sum_{i=1}^{4} |z_i| \le |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_4|$$

On a démontré

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} |z_i| \le \sum_{1 \le i < j \le 4} |z_i + z_j|}$$

Exercice 2 : bijection et nombres complexes

1. *On note $P = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On note f l’application définie pour tout $z \ne i$, par*

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Montrer que f est une bijection de P sur D.

2. *Soient quatre réels a, b, c, d tels que $ad - bc = 1$. Soit h l’application définie sur $\mathbb{C}$ par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.*

Montrer que pour tout complexe $z \ne -\frac{d}{c}$,

$$Im(h(z)) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$$

En déduire que h est une bijection de P sur P.

Solution de l’exercice

1. – Soit $z \in P$. Montrons que $f(z) \in D$, c’est à dire $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$, ce qui est équivalent à $|z-i|^2 < |z+i|^2$. En remarquant que $|Z|^2 = Z\bar{Z}$, l’inéquation est équivalente à $(z-i)(\bar{z}+i) < (z+i)(\bar{z}-i)$, puis en développant et en remarquant que $z - \bar{z} = 2iIm(z)$, à $4Im(z) > 0$ et donc à $z \in P$.

Soit $Z \in D$. Montrons l’existence et l’unicité de $z \in P$, tel que $f(z) = \frac{z-i}{z+i} = Z$, $Z \in D$ étant différent de 1.

$$f(z) = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{1-Z}.$$

Vérifions que $z \in P$. $z = \frac{i(Z+1)(1-\bar{Z})}{|1-Z|^2} = \frac{i(1-|Z|^2+2iIm(Z))}{|1-Z|^2}$. Donc $Im(z) = \frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > 0$, car $Z \in D$. Cela démontre que

$$\boxed{f \text{ est une bijection de } P \text{ sur } D.}$$

2. – Soit $z \ne -\frac{d}{c}$.

$$h(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + db}{|cz+d|^2}$$

En prenant les parties imaginaires, on obtient :

$$Im(h(z)) = \frac{adIm(z) - bcIm(z)}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)Im(z)}{|cz+d|^2}$$

Or $ad - bc = 1$, donc

$$\boxed{Im(h(z)) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}}$$

– Remarquons que si $z \in P$, alors $h(z) \in P$, car d’après l’égalité précédente,

$$Im(z) > 0 \to Im(h(z)) > 0.$$

Soit $Z \in P$. Montrons l'existence et l'unicité de $z \in P$ tel que $h(z) = Z$. Comme $Z \neq a/c$, P ne contenant pas les réels,

$$h(z) = Z \Leftrightarrow z = \frac{dZ - b}{a - cZ}.$$

Vérifions que $Im(z) > 0$. Pour cela, appliquons le résultat précédent en remplaçant a par d, b par $-b$, c par $-c$, et d par a. Comme $da-(-b)(-c) = 1$, $Im(z) = \frac{Im(Z)}{|-cZ+a|^2} > 0$, $Z \in P$. Cela démontre que

$\boxed{h \text{ est une bijection de } P \text{ sur } P.}$

Exercice 3 : sur les racines n-ièmes de l'unité

Soient a, b deux réels distincts. Soit n un entier naturel non nul.

1. *Montrer que l'équation $(z-a)^n - (z-b)^n = 0$ admet $n-1$ racines complexes que l'on exprimera à l'aide des racines n-ièmes de l'unité.*
2. *Montrer que les solutions trouvées ont toutes même partie réelle, égale à $\frac{a+b}{2}$.*
3. *Retrouver le résultat de la question précédente par de (simples) considérations géométriques.*

Solution de l'exercice

1. Comme $a \neq b$, b n'est pas solution, et l'équation est équivalente à $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = 1$. z est solution si et seulement si il existe un entier k, $0 \leq k \leq n-1$, tel que $\frac{z-a}{z-b} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Donc z est solution si et seulement si il existe un entier k, $0 \leq k \leq n-1$, tel que $z(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = a - be^{\frac{2ik\pi}{n}}$. (1)
   - Si $k = 0$, (1) devient $z * 0 = a - b$, qui est impossible.
   - Si $1 \leq k < n-1$, $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et

$$z = \frac{a - be^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{a - be^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \left\{ z_k = \frac{\left(a - be^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)ie^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \middle| 1 \leq k \leq n-1 \right\}}$$

2. Soit un entier k tel que $1 \leq k < n-1$, calculons $Re(z_k) = (z_k + \bar{z}_k)/2$.

$$Re(z_k) = \frac{1}{4\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\left(ie^{-\frac{ik\pi}{n}}\left(a - be^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) + (-i)e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(a - be^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right)$$

$$Re(z_k) = \frac{1}{4\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}i(a+b)\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

D'après les formules d'Euler :

$$Re(z_k) = \frac{1}{4\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}2(a+b)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{a+b}{2}.$$

$\boxed{\text{Toutes les solutions ont même partie réelle égale à } \frac{a+b}{2}.}$

3. Si z est solution de l'équation, alors $|z-a| = |z-b|$. Donc le point M_k, d'affixe z_k solution de l'équation vérifie $AM_k = BM_k$ où A et B sont les points d'affixe a et b. M_k appartient donc à la médiatrice de AB qui a pour équation $x = (a+b)/2$.

Exercice 4 : coefficients binomiaux et formule du binôme dans C

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Pour $0 \leq p \leq 2$, on note $S_p = \sum_{k=0}^{E[\frac{n-p}{3}]} C_n^{3k+p}$.

1. *Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Qu'est ce que j^3? Déterminer j^r, pour tout entier naturel r. Que vaut $1 + j + j^2$?*
2. *Un exemple. Dans le cas $n = 10$, expliciter S_0, S_1, S_2 et expliciter $(1+1)^{10}$, $(1+j)^{10}$, $(1+j^2)^{10}$ à l'aide de ces trois sommes.*
3. *On revient au cas général. Calculer $(1+1)^n$, $(1+j)^n$, $(1+j^2)^n$, à l'aide de S_p, $0 \leq p < 2$. En déduire que S_0, S_1, S_2 sont solutions d'un système de matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ à déterminer et de second membre $(2^n, (-1)^n j^{2n}, (-1)^n j^n)$.*
4. *Pour $A \in M_3(\mathbb{C})$, de coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$, on note $\bar{A}$ la matrice de $M_3(\mathbb{C})$, de coefficients $(\bar{a}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$. Calculer $A\bar{A}$, pour A définie en 3. En déduire l'inversibilité de A et son inverse.*
5. *En déduire S_p, $0 \leq p \leq 2$.*

Solution de l'exercice

1. j est une racine cubique de l'unité. Comme $j^3 = 1$, on obtient pour tout réel r,
   - $j^r = 1$ si et seulement si $r = 3k$
   - $j^r = j$ si et seulement si $r = 3k+1$
   - $j^r = j^2$ si et seulement si $r = 3k+2$

   De plus, $1 + j + j^2 = 0$.
2. On laisse au lecteur le soin de résoudre cette question, servant à mieux comprendre les notations.
3. D'après la formule du binôme,

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r = \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{3}]} C_n^{3k} + \sum_{k=0}^{E[\frac{n-1}{3}]} C_n^{3k+1} + \sum_{k=0}^{E[\frac{n-2}{3}]} C_n^{3k+2}$$

Donc, $\boxed{S_0 + S_1 + S_2 = 2^n}$. De même,

$$(1+j)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r j^r = \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{3}]} C_n^{3k} + j\sum_{k=0}^{E[\frac{n-1}{3}]} C_n^{3k+1} + j^2\sum_{k=0}^{E[\frac{n-2}{3}]} C_n^{3k+2}$$

Donc, $\boxed{S_0 + jS_1 + j^2S_2 = (1+j)^n}$. Enfin, en passant au conjugué, et en remarquant que $j^2 = \bar{j}$ et $\bar{Z}^n = \bar{Z}^n$, on obtient: $\boxed{S_0 + j^2S_1 + jS_2 = (1+j^2)^n}$.
Remarquons que $(1+j)^n = (-1)^n j^{2n}$ et que $(1+j^2)^n = (-1)^n j^n$. S_0, S_1, S_2 sont alors solutions du système (S),

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= 2^n \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= (-1)^n j^{2n} \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 &= (-1)^n j^n \end{cases}$$

La matrice de ce système est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}}$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

Comme $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$, on obtient $A\bar{A} = \bar{A}A = 3I$. Donc,

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \tfrac{1}{3}\bar{A}}.$$

5. A étant inversible, le système (S) admet une unique solution $A^{-1}B$, avec

$$B = \begin{pmatrix} 2^n \\ (-1)^n j^{2n} \\ (-1)^n j^n \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{cases} S_0 &= (2^n + (-1)^n j^{2n} + (-1)^n j^n)/3 \\ S_1 &= (2^n + (-1)^n j^{2n+2} + (-1)^n j^{n+1})/3 \\ S_2 &= (2^n + (-1)^n j^{2n+1} + (-1)^n j^{n+2})/3 \end{cases}$$

A l'aide des formules d'Euler, on conclut :

$$\boxed{\begin{cases} S_0 &= \left(2^n + 2(-1)^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)/3 \\ S_1 &= \left(2^n + 2(-1)^n \cos\left(\frac{(2n+2)\pi}{3}\right)\right)/3 \\ S_2 &= \left(2^n + 2(-1)^n \cos\left(\frac{(2n-2)\pi}{3}\right)\right)/3 \end{cases}}$$

Exercice 5 : polynômes trigonométriques

1. Rappeler la valeur de i^n pour tout entier naturel n

2. A l'aide des formules de Moivre et de Newton, exprimer $\cos(na)$ et $\sin(na)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$. En déduire $\tan(na)$ en fonction de $\tan a$, en précisant les valeurs de a pour lesquelles cette égalité est définie.

3. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel a,

$$\cos(na) = \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}(a)(1-\cos^2(a))^k.$$

Expliciter la formule pour $n = 3$.

Solution de l'exercice

1. Pour tout entier naturel n, comme $i^4 = 1$,
   - $i^n = (-1)^p$ si et seulement si $n = 2p$
   - $i^n = (-1)^p i$ si et seulement si $n = 2p+1$

2. D'après la formule de Moivre, $\cos(na) = Re((\cos a + i\sin a)^n)$. D'après la formule du binôme,

$$(\cos a + i\sin a)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (\cos a)^{n-r} i^r (\sin a)^r$$

D'après la question précédente,

$$(\cos a + i\sin a)^n = \sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} (\cos a)^{n-2k} (-1)^k (\sin a)^{2k} + i \sum_{k=0}^{E[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} (\cos a)^{n-2k-1} (-1)^k (\sin a)^{2k+1}$$

Donc en considérant les parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos(na) = \textstyle\sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} (\cos a)^{n-2k} (-1)^k (\sin a)^{2k}} \text{ et}$$
$$\boxed{\sin(na) = \textstyle\sum_{k=0}^{E[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} (\cos a)^{n-2k-1} (-1)^k (\sin a)^{2k+1}}.$$

Pour a tel que $\cos a \neq 0$ et $\cos(na) \neq 0$, c'est à dire pour $a \in \mathbf{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbf{Z}\})$,

$$\tan(na) = \frac{\sum_{k=0}^{E[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} (\cos a)^{n-2k-1} (-1)^k (\sin a)^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} (\cos a)^{n-2k} (-1)^k (\sin a)^{2k}}$$

Remplaçons $\sin a$ par $\cos a \tan a$. On obtient alors :

$$\tan(na) = \frac{(\sum_{k=0}^{E[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} (-1)^k (\tan a)^{2k+1})(\cos a)^n}{(\sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} (-1)^k (\tan a)^{2k})(\cos a)^n}$$

Donc

$$\boxed{\tan(na) = \frac{\sum_{k=0}^{E[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} (-1)^k (\tan a)^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{E[n/2]} C_n^{2k} (-1)^k (\tan a)^{2k}}}$$

pour $a \in \mathbf{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbf{Z}\})$.

3. En remarquant que $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, d'après 2, on obtient :

$$\boxed{\cos(na) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}(a)(1-\cos^2(a))^k.}$$

Pour $n = 3$, on obtient $\cos(3a) = 4\cos(a)^3 - 3\cos(a)$.

Exercice 6 : calcul de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ et applications

Soient a, x deux réels et n un entier naturel.

1. *Montrer que si $x \notin \{2r\pi \mid r \in \mathbf{Z}\}$, alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

2. *Calculer*

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx) \quad , \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx)$$
$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(a+kx) \quad , \quad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(a+kx)$$
$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\sin(kx) \quad .$$

3. *On suppose $n \neq 0$. On note pour tout entier p compris entre 1 et n, $x_p = \frac{p\pi}{n+1}$. On note pour tous entiers p et q compris entre 1 et n, $s_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx_p)\sin(kx_q)$. Montrer que :*
$s_{p,p} = \frac{n+1}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx_p) = -1$
si $n \geq 2p > 2q > 0$, $s_{2p,2q} = 0$.

Solution de l'exercice

1. $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}$, car $e^{ix} \neq 1$. Or

$$e^{i(n+1)x} - 1 = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}(e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}) = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}(2i\sin(\frac{(n+1)x}{2}))$$

et $e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}) = e^{i\frac{x}{2}}(2i\sin(\frac{x}{2}))$. Donc,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

2. Notons $S(a,x) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(kx+a)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.
D'après la question précédente, si $x \notin \{2r\pi \mid r \in \mathbf{Z}\}$,

$$S(a,x) = e^{i(a+\frac{nx}{2})}\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

On en déduit :
2.*a*. Si $x \notin \{2r\pi \mid r \in \mathbf{Z}\}$,

$$\boxed{S_1 = Re(S(a,x)) = \cos(a+\tfrac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

Sinon, $S_1 = (n+1)\cos(a)$.
2.*b*. Si $x \notin \{2r\pi \mid r \in \mathbf{Z}\}$,

$$\boxed{S_2 = Im(S(a,x)) = \sin(a+\tfrac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

Sinon, $S_2 = (n+1)\sin(a)$.
$S_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\cos(2a+2kx)+1) = \frac{1}{2}(S_1+n+1)$, avec S_1 associée à $2a$ et $2x$ et calculée en 2.*a*.
$S_4 = (n+1) - S_3$.
$S_5 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin(2kx) = \frac{1}{2}S_2$, avec S_2 associée à 0 et $2x$ et calculée en 2.*b*.

3. On a :

$$\begin{aligned} s_{p,q} &= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx_p)\sin(kx_q) & (1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\cos(k(x_p - x_q)) - \cos(k(x_p+x_q))) & (2)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(Re(e^{ik(x_p-x_q)}) - Re(e^{ik(x_p+x_q)})). & (3)\end{aligned}$$

On en déduit, d'après 1,
$s_{p,p} = (n+1)/2$
$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx_p) = n - 2s_{p,p} = -1$
$x_{2(p-q)}$ et $x_{2(p+q)}$ ne sont pas multiples de 2π et $\sin((n+1)(x_{p-q})) = \sin((n+1)(x_{p+q})) = 0$,
donc $s_{2p,2q} = 0$.

Deux exercices ayant un intérêt historique

Exercice 7 : méthode de Cardan de résolution par radicaux de l'équation du troisième degré

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $a \neq 0$. L'exercice étudie l'équation (E_1) $(ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, x \in \mathbf{C})$.

1. *Montrer, en posant $x = z + \frac{b}{3a}$, l'existence de p et q, que l'on exprimera en fonction de a, b, c, d, tels que (E_1) est équivalente à (E_2) $(z^3 + pz + q = 0, z \in \mathbf{C})$.*

2. *On pose $z = u + v$. Montrer que (E_2) est équivalente à $(u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv+p) = 0$ et que (E_2) est vérifiée si $u^3 + v^3 = -q$ et $uv = -p/3$. Sous cette hypothèse, en posant $U = u^3$ et $V = v^3$, trouver une équation du deuxième degré de solutions U et V.*

3. *Soient U et V les racines de $Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$. Montrer l'existence de u et v racines cubiques de U et V telles que $3uv + p = 0$. Exprimer toutes les solutions de (E_2) en fonction de u et v.*

Un peu d'histoire
Cette méthode de résolution est due à Cardan (Ars magna, 1545) qui établit les formules

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

Ces formules auraient été précédemment établies par Scipione del Ferro (1500) et Tartaglia (1499-1557). Ces formules, si elles ne sont pas toujours efficaces numériquement, ont eu cependant une *grande importance historique. D'une part, elles sont à l'origine des premières manipulations de racines de quantités négatives. D'autre part, elles fournissent les solutions de l'équation de degré 3 comme fonctions explicites de ses coefficients; l'existence de telles formules pour des équations de degré supérieur sera un domaine de recherche très fécond des mathématiques (Galois, 1831).*

Solution de l'exercice

1. En posant $z = x - \frac{b}{3a}$, on trouve que (E_1) est équivalente à (E_2) $(x^3+px+q=0, x \in \mathbf{C})$, en posant $\boxed{p = \frac{7b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}}$ et $\boxed{q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}}$.

2. En posant $x = u+v$, on vérifie que (E_2) est équivalente à $(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p) = 0$. Si $u^3+v^3 = -q$ et $uv = -p/3$ (E_2) est alors vérifiée. Si on pose $U = u^3$ et $V = v^3$, alors $U+V = -q$ et $UV = -\frac{p^3}{27}$. $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont donc solutions de l'équation } z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0}$.

3. Soient u_0 une racine cubique de U et v_0 une racine cubique de V. Alors u_0v_0 est une racine cubique de $-\frac{p^3}{27}$, donc égale à $-\frac{p}{3}$ ou $-j\frac{p}{3}$ ou $-j^2\frac{p}{3}$. On choisit u_0 et v_0 racines cubiques de U et V telles que $3u_0v_0+p=0$. L'ensemble des racines cubiques de U est $A = \{u_0, ju_0, j^2u_0\}$ et l'ensemble des racines cubiques de V est $B = \{v_0, jv_0, j^2v_0\}$. Les couples $(u,v) \in A \times B$ tels que $3uv+p=0$ sont alors (u_0,v_0), (ju_0, j^2v_0) et (j^2u_0, jv_0); qui donnent pour solutions de (E_2), u_0+v_0, $ju_0+j^2v_0$ et $j^2u_0+jv_0$. Ce sont les seules, un polynome de degré 3 de $\mathbf{C}[X]$ ayant 3 racines exactement.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sont } u_0+v_0,\ ju_0+j^2v_0 \text{ et } j^2u_0+jv_0}.$$

Exercice 8 : forme algébrique des racines n-ièmes de l'unité

Soit n un entier non nul.

On pose $r = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Un peu d'histoire

L'équation $z^n-1=0$ admet n solutions, qui sont $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$, et qui vérifient $S = 1+r+\dots+r^{n-1} = 0$. Mais cette résolution qui donne la forme trigonométrique des solutions ne permet pas nécessairement de trouver leur forme algébrique. Van der Monde (1735-1796) et Gauss vont essayer une résolution algébrique de l'équation, en calculant des sous sommes disjointes de S comme racines d'équations de degrés inférieurs. Cet exercice propose des exemples de tels calculs.

1. *On suppose $n=5$. Donc $r = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $r^5=1$. On pose $s_1 = r+r^4 = r+\frac{1}{r}$ et $s_2 = r^2+r^3 = r^2+\frac{1}{r^2}$.*
   Calculer s_1+s_2 et s_1s_2. Montrer que s_1 et s_2 sont solutions de l'équation $x^2+x-1=0$.
   En déduire s_1, en remarquant que $Re(s_1) > 0$.
   En remarquant que $r+r^4 = s_1$ et $rr^4 = 1$, déterminer r sachant que $Im(r) > 0$. Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

2. *On suppose $n=7$. Donc $r = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et $r^7=1$. On pose $s_1 = r+r^2+r^4$ et $s_2 = r^3+r^5+r^6$.*
   Montrer que s_1 et s_2 sont solutions d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers.
   En déduire s_1.
   Calculer $\sum_{k=0}^{6} r^{k^2}$.

Solution de l'exercice

1. – $s_1+s_2 = r+r^2+r^3+r^4+1-1 = -1$, car $1+r+r^2+r^3+r^4 = 0$. $s_1s_2 = r^3+r^4+r^6+r^7 = r+r^2+r^3+r^4+1-1 = -1$. Donc s_1 et s_2 sont solutions de l'équation $\boxed{x^2+x-1=0}$, de discriminant 5 et de solutions $\frac{-1+\sqrt5}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt5}{2}$. r et r^4 ayant des parties réelles positives, il en est de même pour s_1. Donc $\boxed{s_1 = \frac{-1+\sqrt5}{2}}$.

   – Comme $r+r^4 = s_1$ et $rr^4 = r^5 = 1$, r et r^4 sont solutions de l'équation $z^2 - s_1z + 1 = 0$, r étant la solution de partie imaginaire strictement positive. Le discriminant de l'équation vaut $(i\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}})^2$. On obtient : $\boxed{r = \frac{-1+\sqrt5}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}}$ et $\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt5}{4}}$.

2. – $s_1+s_2 = r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+1-1 = -1$, car $1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6 = 0$. $s_1s_2 = r^4+r^6+r^7+r^5+r^7+r^8+r^7+r^9+r^{10} = 1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+2 = 2$. Donc s_1 et s_2 sont solutions de l'équation $\boxed{x^2+x+2=0}$, de discriminant -7 et de solutions $\frac{-1+i\sqrt7}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt7}{2}$. Or $Im(s_1) = \sin(\frac{2\pi}{7})+\sin(\frac{4\pi}{7})-\sin(\frac{\pi}{7})$, donc $Im(s_1) > \sin(\frac{4\pi}{7}) > 0$. On en déduit

$$\boxed{s_1 = \frac{-1+i\sqrt7}{2}}.$$

   – Comme $r^7 = 1$, $\sum_{k=0}^{6} r^{k^2} = 1+2r+2r^2+2r^4 = 1+2s_1$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{6} r^{k^2} = i\sqrt7}.$$

Petits (?) problèmes

Exercice 9 : coefficients de Fourier • version "deuxième année •

Pour tout entier naturel k, on note f_k la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_k(t) = \cos(kt)$.

1. *Calculer pour tout entier p et tout entier q, en distinguant $p = q$ et $p \neq q$:*

$$I_{p,q} = \int_0^{\pi} f_p(t) f_q(t)\,dt.$$

2. *Soient un entier non nul n. On note $E_n = Vect(f_0, \dots, f_n)$.*

   2-a. *Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E_n, à l'aide de la question précédente.*

   2-b. *Montrer que si p est un entier naturel tel que $0 \le p \le n$, la fonction $g_p : t \in \mathbf{R} \mapsto \cos^p(t)$ appartient à E_n.*

   2-c. *Soient $a_0, \dots, a_n$ les coordonnées de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$. Calculer a_n.*

3. *Déduire pour tout entier non nul n et tout entier $0 \le p \le n$, $J_{p,n} = \int_0^{\pi} \cos^p(t)\cos(nt)\,dt$, en distinguant les cas $p < n$ et $p = n$.*

Solution du problème

1.

$$f_p(t) f_q(t) = \frac{1}{2}(\cos((p+q)t) + \cos((p-q)t))$$

– Si $p - q = 0$, $I_{p,q} = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi$.

– Si $p - q \neq 0$,

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(2pt)+1)\,dt = \frac{1}{2}([\frac{\sin(2pt)}{2p}]_0^{\pi} + \pi) = \frac{\pi}{2}.$$

– Si $p \neq q$, alors $p+q \neq 0$ et $p-q \neq 0$.

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((p+q)t)+\cos((p-q)t))dt = \frac{1}{2}([\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}]_0^{\pi}+[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q}]_0^{\pi}) = 0.$$

2. 2-a. $(f_0,\dots,f_n)$ est une famille génératrice de E_n. A l'aide de la question précédente, montrons qu'elle est libre. Soient des réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i = 0$. Pour tout q compris entre 0 et n,

$$\int_0^{\pi}(\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(t)) f_q(t)dt = 0.$$

Donc

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \int_0^{\pi} f_i(t) f_q(t)dt = 0.$$

D'après 1,

$$\int_0^{\pi}(\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(t)) f_q(t)dt = \lambda_q \frac{\pi}{2}.$$

Donc, pour tout q compris entre 0 et n, $\lambda_q = 0$. Ce qui démontre la liberté de $(f_0,\dots,f_n)$.

$$\boxed{(f_0,\dots,f_n) \text{ est une base de } E_n}.$$

2-b. Soit p est un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. Par linéarisation, la fonction $g_p : t \in \mathbf{R} \mapsto \cos^p(t)$ appartient à E_n. En effet, d'après la formule du binôme, et les formules d'Euler,

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}(e^{it}+e^{-it})^p = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^p C_p^k e^{i(p-2k)t}$$

Si p est pair, $p = 2r$, posons $r - k = l$.

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}\sum_{l=-r}^{r} C_p^{r-l} e^{i2lt}$$

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}(\sum_{l=-r}^{-1} C_p^{r-l} e^{i2lt} + C_p^r + \sum_{l=1}^{r} C_p^{r-l} e^{i2lt})$$

En changeant l en $-l$ dans la première somme et en utilisant que $C_{2r}^{r-l} = C_{2r}^{r+l}$, on obtient :

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}(\sum_{l=1}^{r} C_p^{r-l}(e^{i2lt}+e^{-i2lt}) + C_p^r) = \frac{1}{2^p}(\sum_{l=1}^{r} C_p^{r-l} 2 f_{2l}(t) + C_p^r)$$

Si p est impair, $p = 2r+1$, posons $l = r-k$.

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}\sum_{l=-r-1}^{r} C_{2r+1}^{r-l} e^{i(2l+1)t} = \frac{1}{2^p}(\sum_{l=-r-1}^{-1} C_{2r+1}^{r-l} e^{i(2l+1)t} + \sum_{l=0}^{r} C_{2r+1}^{r-l} e^{i(2l+1)t})$$

En posant $j = -l-1$ dans la première somme et en utilisant que

$$C_{2r+1}^{r-l} = C_{2r+1}^{2r+1-(r-l)} = C_{2r+1}^{r+l+1} = C_{2r+1}^{r-j}$$

on obtient :

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}(\sum_{j=0}^{r} C_{2r+1}^{r-j} e^{-i(2j+1)t} + \sum_{l=0}^{r} C_{2r+1}^{r-l} e^{i(2l+1)t})$$

$$\cos^p(t) = \frac{1}{2^p}(\sum_{j=0}^{r} C_{2r+1}^{r-j}(e^{-i(2j+1)t}+e^{i(2j+1)t})) = \frac{1}{2^p}\sum_{j=0}^{r} C_p^{r-j} 2 f_{2j+1}(t)$$

2-c. Soient $a_0,\dots,a_n$ les coordonnées de g_n dans la base $(f_0,\dots,f_n)$. D'après la question précédente, $a_n = \frac{1}{2^n}2C_n^0$. Donc, que n soit pair ou **impair**,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

3. D'après 2,

$$J_{p,n} = \int_0^{\pi} \cos^p(t)\cos(nt)dt = \int_0^{\pi}(\sum_{k=0}^{p} a_k f_k(t))\cos(nt)dt$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$J_{p,n} = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_0^{\pi} f_k(t)\cos(nt)dt = \sum_{k=0}^{p} I_{p,n}$$

D'après 1,

$$\boxed{\text{Si } p < n,\ J_{p,n} = 0}\ \boxed{\text{Si } p = n,\ J_{p,n} = \frac{\pi}{2^n}}$$

Exercice 10 : coefficients de Fourier • version "première année •

Pour tout entier naturel k, on note f_k la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_k(t) = \cos(kt)$.

1. *Calculer pour tout entier p et tout entier q, en distinguant $p = q$ et $p \neq q$:*

$$I_{p,q} = \int_0^{\pi} f_p(t) f_q(t)dt.$$

2. *Soient un entier non nul n. On note E_n l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles qu'il existe des réels $a_0,\dots,a_n$ vérifiant $f = a_0f_0 + a_1f_1 + \cdots + a_nf_n$.*

   2-a. Montrer que si $0 \leq p \leq n$, la fonction $g_p : t \in \mathbf{R} \mapsto \cos^p(t)$ appartient à E_n.

   2-b. Soient $a_0,\dots,a_n$ les réels tels que $g_n = a_0f_0 + \ldots + a_nf_n$. Calculer a_n.

3. *Déduire pour tout entier non nul n et tout entier $0 \leq p \leq n$, $J_{p,n} = \int_0^{\pi}\cos^p(t)\cos(nt)dt$, en distinguant les cas $p < n$ et $p = n$.*

Solution du problème

1. voir exercice 9 question 1
2. voir exercice 9 question 2b et 2c
3. voir exercice 9 question 3

Exercice 11 : transformation de Fourier discrète

Pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, on note $\omega_r = e^{i\frac{2\pi}{r}}$. Les racines r-ièmes de l'unité sont alors $(\omega_r{}^k, 0 \le k \le r-1)$. Pour $m \in \mathbf{N}$, on note E_m l'ensemble formé de la fonction nulle et des fonctions polynomiales définies sur $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, de degré inférieur ou égal à m. Soient n un entier naturel non nul et $N = 2^n$.

1. *Soit $(P : z \mapsto P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{N-1}z^{N-1})$ une fonction polynomiale appartenant à E_{N-1}. On suppose connus, pour tout entier k compris entre 0 et $N-1$, le complexe noté s_k égal à $P(\omega_N{}^k)$. Le but de la question est de déterminer les coefficients de P, $a_0, \dots, a_{N-1}$, à l'aide de $(s_0, \dots, s_{N-1})$. Pour cela, on pose $\hat{P}$ la fonction polynomiale définie par $\hat{P}(z) = s_0 + \cdots + s_{N-1}z^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} s_k z^k$.*

   1-a. *Exemple. On suppose $n = 2$, donc $N = 4$.*
   Montrer que pour tout entier l compris entre 0 et 3, $\frac{1}{4}\hat{P}(\frac{1}{\omega_4{}^l}) = a_l$.
   On suppose que $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = 4$. Déterminer les coefficients de la fonction polynomiale P.

   1-b. *On revient au cas général. Montrer :*
   Pour tout $(k,l) \in [0, N-1]^2$, $\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N{}^{j(k-l)}$ est égal à 0 si $k \neq l$, et à N si $k = l$.
   Pour tout $k \in [0, N-1]$, $a_k = \frac{1}{N}\hat{P}(\frac{1}{\omega_N^k})$.

2. *Soit $(P : z \mapsto P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{N-1}z^{N-1})$, une fonction polynomiale appartenant à E_{N-1}. Le but de la question est de déterminer $s_k = P(\omega_N{}^k)$, pour tout $k \in [0, N-1]$. Pour cela, on définit les fonctions polynomiales P_1 et P_2 par :*

$$\begin{cases} P_1(z) = a_0 + a_2 z + \cdots + a_{N-2}z^{\frac{N}{2}-1} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k}z^k \\ P_2(z) = a_1 + a_3 z + \cdots + a_{N-1}z^{\frac{N}{2}-1} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1}z^k \end{cases}$$

   2-a. *Exemple. On suppose $n = 3$ et $P(z) = 4 - z + 2z^2 - 5z^3 + z^5 - 6z^6 + z^7$.*
   Calculer P_1, P_2 et trouver une relation liant z, $P(z)$, $P_1(z^2)$, $P_2(z^2)$.
   Montrer :

$$\begin{cases} s_1 = P(\omega_8{}^1) = P_1(i) + \omega_8{}^1 P_2(i) \\ s_5 = P(\omega_8{}^5) = P_1(i) - \omega_8{}^1 P_2(i) \end{cases}$$

   2-b. *On revient au cas général. Montrer :*
   $P(z) = P_1(z^2) + zP_2(z^2)$.
   Pour tout $k \in [0, \frac{N}{2}-1]$, $s_k = P(\omega_N{}^k) = P_1(\omega_{N/2}^k) + \omega_N^k P_2(\omega_{N/2}^k)$.
   Pour tout $k \in [\frac{N}{2}-1, N]$, si on note $K = k - \frac{N}{2}$, $s_k = P(\omega_N{}^k) = P_1(\omega_{N/2}^K) - \omega_N^K P_2(\omega_{N/2}^K)$.

   2-c. *On note m_N le nombre de multiplications complexes nécessaires au calcul de $(s_0, \dots, s_{N-1})$.*
   En remarquant que P_1 et P_2 sont de degré $\frac{N}{2}-1$, montrer : $m_N = 2m_{\frac{N}{2}} + N$.
   On pose pour tout entier non nul n, $u_n = \frac{m_N}{2^n}$, où $N = 2^n$. Trouver une relation liant u_n et u_{n+1}, et en déduire $u_n = n$.
   Calculer m_N en fonction de N et $ln(N)$.

Solution du problème

1. 1-a. $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ et $\omega_4 = i$, donc

$$\begin{cases} s_0 = P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ s_1 = P(i) = a_0 + a_1 i - a_2 - a_3 i \\ s_2 = P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ s_3 = P(-i) = a_0 - a_1 i - a_2 + a_3 i \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} 4a_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = \hat{P}(1) = \hat{P}(\frac{1}{\omega_4{}^0}) \\ 4a_1 = s_0 - is_1 - s_2 + is_3 = \hat{P}(-i) = \hat{P}(\frac{1}{\omega_4{}^1}) \\ 4a_2 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 = \hat{P}(-1) = \hat{P}(\frac{1}{\omega_4{}^2}) \\ 4a_3 = s_0 + is_1 - s_2 - is_3 = \hat{P}(i) = \hat{P}(\frac{1}{\omega_4{}^3}) \end{cases}$$

$\hat{P}(X) = 1 - z^2 + 4z^3$, donc :

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = \hat{P}(1)/4 = 1 \\ a_1 = \hat{P}(-i)/4 = 1/2 + 4i \\ a_2 = \hat{P}(-1)/4 = -1 \\ a_3 = \hat{P}(i)/4 = 1/2 - 4i \end{cases}}$$

1-b. Si $k \neq l$, $\omega_N{}^{(k-l)} \neq 1$, donc

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N{}^{j(k-l)} = \frac{1 - \omega_N{}^{N(k-l)}}{1 - \omega_N{}^{(k-l)}} = 0.$$

Si $k = l$, $\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N{}^{j(k-l)} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N$.

$$\hat{P}(\frac{1}{\omega_N^k}) = \sum_{j=0}^{N-1}(\sum_{l=0}^{N-1} a_l \omega_N^{jl})\omega_N{}^{-kj} = \sum_{l=0}^{N-1} a_l (\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j(l-k)})$$

D'après la question précédente, $\boxed{\hat{P}(\frac{1}{\omega_N^k}) = Na_k}$.

2. 2-a. $P_1(z) = 4 + 2z - 6z^3$, $P_2(z) = -1 - 5z + z^2 + z^3$ et $P(z) = P_1(z^2) + zP_2(z^2)$.
$\omega_8^5 = -\omega_8$ et $\omega_8^2 = i$. En utilisant la question précédente, on en déduit les deux relations à démontrer.

2-b. $P(z) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j z^j = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k}(z^2)^k + z(\sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k+1}(z^2)^k) = P_1(z^2) + zP_2(z^2)$.
Il suffit d'utiliser la question précédente et de remarquer que $\omega_N^{2k} = \omega_{N/2}^k$.
Il suffit d'utiliser la question 2.b.1 et de remarquer que $\omega_N{}^{2k} = \omega_{N/2}^{k-N/2}$ et que $\omega_N^k = -\omega_{N/2}^{k-N/2}$.

2-c. D'après les questions 2.b.2 et 2.b.3, il est nécessaire de calculer $P_1(\omega_{N/2}^k)$ et $P_2(\omega_{N/2}{}^k)$ pour $0 \le k \le N/2 - 1$, et d'effectuer de plus N multiplications complexes. On en déduit, en remarquant que P_1 et P_2 sont de degré $N/2-1$, la relation $m_N = 2m_{N/2} + N$.
D'après la question précédente, $u_n = u_{n-1} + 1$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_1 = 1$. Donc pour tout $n \ge 1$, $u_n = n$.
Donc $\boxed{m_N = Nn = NLn(N)/Ln(2)}$.