Mathématiques

Cahier de vacances

François Delaplace

Professeur de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales (ECS2), lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles).

Après une année studieuse et avant une année marquée par les concours, il est bien légitime de penser enfin à se reposer; mais, prudence, réservons nous quelques jours, disons les quinze derniers jours de vacances, pour faire le point sur nos connaissances; est-ce vraiment nécessaire, me direz-vous? La réponse est dans le QCM qui suit, (les questions sont prises dans le tronc commun aux deux options, économiques et scientifiques).

Retrouvons-nous, disons vers le 15 août ; si, à cette période de vos vacances, vous êtes capable de répondre correctement aux questions suivantes, alors vous êtes prêt pour la rentrée; mais si vous vous trompez sur un certain nombre d'entre-elles, ou si certaines vous sont complètement étrangères, il est temps de vous y remettre. Avant de boucler vos valises et partir bronzer sur les plages ensoleillées et surpeuplées, vérifiez qu'entre le maillot de bain et la crème solaire, vous n'avez pas oublié ce précieux cahier qui marquera la transition entre vos deux années de classe préparatoire. Il n'est pas question de refaire en quelques pages tout le programme d'une année mais seulement de reprendre ensemble quelques questions qui faciliteront un *rafraîchissement* des connaissances.

Les exercices marqués d'une étoile (★) sont faisables par tous et ne présentent pas de grandes difficultés.

Les exercices marqués de deux étoiles (★★) sont plus difficiles mais sont faisables pour les options scientifiques et les options économiques.

Les exercices marqués du symbole (💣) sont réservés aux options scientifiques.

Bonnes vacances à tous.

F. D.

QCM

Définitions : Un sous-ensemble propre d'un ensemble E est un sous-ensemble de E distinct de E et de l'ensemble vide.
Deux ensembles sont équipotents, s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

		Vrai / Faux
Q 1	Il existe des ensembles qui sont équipotents à l'un de leur sous-ensemble propre.	
Q 2	L'ensemble $\{\varnothing\}$ contient au moins un élément	
Q 3	L'ensemble des parties d'un ensemble E contient toujours au moins deux éléments : l'ensemble vide et l'ensemble lui-même	
Q 4	Soit n et k deux entiers naturels. Le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ dans $\{0,1\}^n$ est C_n^k	
Q 5	Le logarithme d'un produit, s'il existe, est égal à la somme des logarithmes?	
Q 6	Tout système d'équations $\begin{cases} a\ \ x + b\ y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ peut se réduire, après changement de variables, à un système de la forme $\begin{cases} X + Y = d \\ X - Y = d' \end{cases}$	
Q 7	L'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est un intervalle fermé	
Q 8	L'image d'un intervalle par une fonction bijective est un intervalle	
Q 9	Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. Si l'image de tout segment inclus dans $[a, b]$ est un segment, alors f est continue sur $[a, b]$.	
Q 10	Si une suite est décroissante et convergente de limite 0, alors elle est positive	
Q 11	Si une suite est positive et convergente de limite 0, alors elle est décroissante	
Q 12	Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente	
Q 13	Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $0 \le u_n \le v_n$ et si (v_n) est convergente de limite λ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \le \lambda$.	
Q 14	Si une suite est continue et minorée alors elle est convergente	
Q 15	Si l'ensemble des termes d'une suite est fini, alors la suite est périodique	
Q 16	Deux suites de même limite sont adjacentes si elles sont monotones	
Q 17	Il existe des suites adjacentes périodiques	
Q 18	Si une suite (u_n) est croissante et si pour tout entier n, $u_n < n$ alors (u_n) est convergente	
Q 19	Si une fonction f admet l pour limite en a, alors pour toute suite (u_n) convergente de limite a, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite l	
Q 20	Si une suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est décroissante alors la suite est décroissante	
Q 21	Si une fonction est continue sur un intervalle $[a, b[$ et si elle admet une limite en b alors elle est continue sur $[a, b]$	
Q 22	Si une fonction est de classe C^1 sur un intervalle $[a, b[$ et si sa dérivée a une limite en b, alors elle est de classe C^1 sur $[a, b]$	
Q 23	Il existe des fonctions de classe C^1 sur un intervalle ayant un maximum sans que la dérivée s'annule	
Q 24	Si une fonction est dérivable en tout point de son ensemble de définition, de dérivée nulle, alors la fonction est constante sur son ensemble de définition	
Q 25	Il existe des fonctions dérivables sur un intervalle qui ne sont pas de classe C^1 sur cet intervalle	
Q 26	Si une fonction f est bijective sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et si sa réciproque est une fonction continue sur J à valeurs dans I, alors f est continue sur I.	
Q 27	Si une fonction est continue et bornée sur un intervalle $]a, b]$ alors elle admet une limite en a.	

Réponses au QCM en fin d'article

Les exercices proposés vous permettrons, outre le fait de revoir les techniques de base du calcul matriciel, de faire aussi un lien entre le calcul matriciel, les systèmes de suites et les suites aritmético-géométriques.

Exercice 1 (★★)

Dans tout cet exercice, on identifie les matrices carrées d'ordre 1 à coefficients réels et les nombres réels.
Soit M une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On note ${}^tM$ sa transposée, c'est-à-dire la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne est celui de la $j^{\text{ème}}$ ligne, $i^{\text{ème}}$ colonne de M.

1-a. On considère les matrices colonnes U et V de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, définie par:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Montrer que les produits ${}^tU.V$ et $U.{}^tV$ existent et les calculer.
A-t-on nécessairement ${}^tU.V = {}^tV.U$? A-t-on $U.{}^tV = V.{}^tU$?

1-b. Soit α un nombre réel quelconque; montrer que ${}^t(U+V) = {}^tU + {}^tV$, ${}^t(\alpha U) = \alpha {}^tU$ et que ${}^t(M.U) = {}^tU.{}^tM$.

2-a. Soit trois suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) telles que pour tout entier naturel n, on ait:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - y_n + 2z_n + 1 \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - y_n + 3z_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 0$$

On pose X_n la matrice colonne

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre 3 et une matrice colonne B de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, telles que pour tout entier naturel n, on ait la relation:

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

2-b. Déterminer les matrices colonnes U non nulles, telles que ${}^tA.U = U$; montrer que

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en est une.
Montrer que la suite (a_n) définie par $a_n = x_n - z_n$ vérifie la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n + {}^tU_1 \cdot B \qquad \text{(R1)}$$

2-c. Déterminer de même les matrices colonnes U non nulles, telles que ${}^tA.U = 2U$; montrer que

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en est une.
Déterminer une relation de récurrence (R2) vérifiée par la suite (b_n) définie par
$b_n = ux_n + vy_n + wz_n$.

3. Exprimer a_n et b_n en fonction de n; en déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Corrigé de l'exercice 1

1-a. Les matrices ${}^tU$ et V sont, respectivement, des matrices de type $(1, n)$ et de type $(n, 1)$; on en déduit que le produit ${}^tU.V$ existe et que c'est une matrice $(1, 1)$:

$${}^tU \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Les matrices U et ${}^tV$ sont, respectivement, des matrices de type $(n, 1)$ et de type $(1, n)$; on en déduit que le produit $U.{}^tV$ existe et que c'est une matrice (n, n):

$$U \cdot {}^tV = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$$

Le produit ${}^tU.V$ est une matrice $(1, 1)$ donc une matrice symétrique; il en résulte que

$${}^tU \cdot V = {}^t({}^tU \cdot V) = {}^tV \cdot U$$

La matrice $U.{}^tV$ n'est pas une matrice symétrique; donc, en général, $U \cdot {}^tV \neq V \cdot {}^tU$

1-b. Les propriétés à démontrer sont quasiment immédiates:

$$^{t}(U+V) = {}^{t}\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & \cdots & u_n+v_n \end{pmatrix} = {}^{t}U + {}^{t}V$$

$$^{t}(\alpha U) = {}^{t}\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 & \alpha u_2 & \cdots & \alpha u_n \end{pmatrix} = \alpha\, {}^{t}U$$

$$^{t}(MU) = {}^{t}\left[\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right] = {}^{t}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j}u_j \\ \sum_{j=1}^{n} m_{2j}u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj}u_j \end{pmatrix}$$

On a tout de suite,

$$^{t}(MU) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j}u_j & \sum_{j=1}^{n} m_{2j}u_j & \cdots & \sum_{j=1}^{n} m_{nj}u_j \end{pmatrix}$$

par ailleurs

$$^{t}U\,{}^{t}M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j}u_j & \sum_{j=1}^{n} m_{2j}u_j & \cdots & \sum_{j=1}^{n} m_{nj}u_j \end{pmatrix}$$

On a bien la relation $^{t}(MU) = {}^{t}U\,{}^{t}M$

2-a. On peut écrire:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et par suite, on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2-b. Soit $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et l'équation d'inconnue U telle que $^{t}A.U = U$; cette équation se ramène à $({}^{t}A - I)U = 0$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3, soit:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilisons la méthode de Gauss pour réduire la matrice:

–2	1	–2
–1	1	–1
2	–1	2
–2	1	–2
0	1	0
0	0	0

On a immédiatement $u = -w$ et $v = 0$. L'ensemble des matrices colonnes U solution de l'équation $^{t}A.U = U$ est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ -u \end{pmatrix} \;/\; u \in \mathbb{R} \right\}$$

La matrice U_1 donnée dans l'énoncé est bien solution de l'équation $^{t}A.U = U$; on prend $u = 1$.

On remarque que la suite (a_n) définie par $a_n = x_n - z_n$ est la suite définie par $a_n = {}^{t}U_1X_n$.
Multiplions à gauche les deux membres de l'égalité $X_{n+1} = AX_n + B$ par $^{t}U_1$.

$$^{t}U_1\, X_{n+1} = {}^{t}U_1\,(AX_n + B) = ({}^{t}U_1\, A)X_n + {}^{t}U_1 B$$

Nous avons montré dans la question *1b* que $^{t}U_1A = {}^{t}({}^{t}AU_1)$ et que $^{t}({}^{t}AU_1) = {}^{t}U_1$ puisque U_1 est une solution de l'équation $^{t}A.U = U$. On en déduit:

$$a_{n+1} = {}^tU_1 X_n + {}^tU_1 B = a_n + {}^tU_1 B$$

On trouve immédiatement que

$${}^tU_1 B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2$$

donc la suite (a_n) est une suite arithmétique et donc on a, pour tout n entier naturel,

$$a_n = a_0 + 2n = (x_0 + z_0) + 2n = 2n + 1$$

2-c. Pratiquons de même pour l'équation ${}^tA.U = 2U$. Elle se ramène à $({}^tA - 2I)U = 0$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3, et posons $U = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$; on a :

$$\left[\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\-1 & 2 & -1\\2 & -1 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\-1 & 0 & -1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Utilisons la méthode de Gauss pour réduire la matrice:

−3	1	−2
−1	0	−1
2	−1	1
−3	1	−2
0	−1	−1
0	−1	−1
−3	1	−2
0	−1	−1
0	0	0

On a immédiatement $v = -w$ et $u = -w$. L'ensemble des matrices colonnes U solution de l'équation ${}^tA.U = U$ est donc

$$\left\{\begin{pmatrix}w\\w\\-w\end{pmatrix} \;/\; w \in \mathbb{R}\right\}$$

La matrice U_2 donnée dans l'énoncé est bien solution de l'équation ${}^tA.U = U$; on prend $w = 1$.

On remarque que la suite (b_n) définie par $b_n = x_n + y_n - z_n$ est la suite définie par $b_n = {}^tU_2 X_n$.

Multiplions à gauche les deux membres de l'égalité $X_{n+1} = AX_n + B$ par ${}^tU_2$.

$${}^tU_2\, X_{n+1} = {}^tU_2\,(AX_n + B) = ({}^tU_2 A)\,X_n + {}^tU_2 B$$

Nous avons montré dans la question *1b* que ${}^tU_2 A = {}^t({}^tAU_2)$ et que ${}^t({}^tAU_2) = 2\,{}^tU_2$ puisque U_2 est une solution de l'équation ${}^tA.U = 2U$. On en déduit:

$$b_{n+1} = {}^tU_2 X_n + {}^tU_2 B = 2b_n + {}^tU_2 B$$

On trouve immédiatement que

$${}^tU_2 B = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2$$

donc la suite (b_n) est une suite arithmético-géométrique; déterminons son point fixe:
$\lambda = 2\lambda + 2$ et donc $\lambda = -2$
on a, pour tout n entier naturel,

$$b_{n+1} - \lambda = 2(b_n - \lambda)$$

donc la suite $(b_n - \lambda)$ est une suite géométrique de raison 2; on a: $b_n - \lambda = 2^n(b_0 - \lambda)$ et par suite, pour tout entier naturel n:

$$b_n = -2 + 2^n(b_0 + 2) \quad \text{avec} \quad b_0 = x_0 + y_0 - z_0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Ainsi $b_n = 2^{n+1} - 2$

3 On a pour tout entier naturel n, $a_n = 2n + 1$ et $b_n = -2 + 2^{n+1}$; on en déduit que pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} x_n - z_n = 2n + 1 \\ x_n + y_n - z_n = -2 + 2^{n+1} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} x_n = 2n + 1 + z_n \\ y_n = -2 + 2^{n+1} - (x_n - z_n) = -2 + 2^{n+1} - 2n - 1 = -2n - 3 + 2^{n+1} \end{cases}$$

Soit, en reportant dans le système:

$$\begin{cases} 2(n+1) + 1 + z_{n+1} = -(2n + 1 + z_n) - (-2n - 3 + 2^{n+1}) + 2z_n + 1 \\ -2(n+1) - 3 + 2^{n+2} = (2n + 1 + z_n) + 2(-2n - 3 + 2^{n+1}) - z_n \\ z_{n+1} = -2(2n + 1 + z_n) - (-2n - 3 + 2^{n+1}) + 3z_n - 1 \end{cases}$$

et après réduction :

$$\begin{cases} 2(n+1)+1+z_{n+1}=z_n+3-2^{n+1} \\ -2(n+1)-3+2^{n+2}=-2n-5+2^{n+2} \\ z_{n+1}=z_n-2n-2^{n+1} \end{cases}$$

La première équation et la dernière équation sont équivalentes; la deuxième est une identité. Finalement on a seulement, pour tout entier naturel k:

$$z_{k+1}=z_k-2k-2^{k+1}$$

Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 1, par le principe du télescopage (suite amalgamante) on a:

$$z_n=z_0-2\sum_{k=0}^{n-1}k-\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}$$

On a respectivement:

$$\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}=2\sum_{k=0}^{n-1}2^k=2\frac{1-2^n}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$$

donc:

$$z_n=-n(n-1)-2\left(2^n-1\right)=2-n(n-1)-2^{n+1}=-n^2+n+2-2^{n+1}$$

Par suite:

$$x_n=2n+1+2-n(n-1)-2^{n+1}=-n^2+3n+3-2^{n+1}$$

Vérifions dans le système les expressions de x_n, y_n et z_n que nous avons trouvées

$$\begin{cases} x_n=-n^2+3n+3-2^{n+1} \\ y_n=-2n-3+2^{n+1} \\ z_n=-n^2+n+2-2^{n+1} \end{cases}$$

On a bien:

$$\begin{cases} -x_n-y_n+2z_n+1=-n^2+n+5-2^{n+2}=x_{n+1} \\ x_n+2y_n-z_n=-2n-5+2^{n+2}=y_{n+1} \\ -2x_n-y_n+3z_n-1=-n^2-n+2-2^{n+2}=z_{n+1} \end{cases}$$

Exercice 2 (★★)

On se propose de démontrer que si A et B sont deux matrices carrées telles que $A+B=AB$ alors les deux matrices A et B commutent, c'est-à-dire qu'elles vérifient la relation $AB=BA$.

1. Considérons dans cette question et dans cette question seulement, la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On se propose de déterminer toute les matrices B carrées d'ordre 3 telles que $A+B=AB$
Montrer que la matrice $I-A$ est une matrice inversible et déterminer son inverse.
On pose $B=I-N$; montrer que N est inversible et préciser son inverse. En déduire la matrice B et vérifier que $AB=BA$.

2. On revient au cas général; étant donné une matrice A carrée d'ordre n, montrer qu'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $A+B=AB$ si, et seulement si, $I-A$ est inversible; préciser alors la matrice $I-B$ en fonction de $I-A$ et en déduire que les deux matrices A et B commutent.

Corrigé de l'exercice 2

1. Calculons $I-A$; montrons qu'elle est inversible et calculons son inverse:

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Réduction de cette matrice par la méthode de Gauss

1	1	−2	1	0	0
−1	−2	1	0	1	0
2	1	−3	0	0	1
1	1	−2	1	0	0
0	−1	−1	1	1	0
0	−1	1	−2	0	1
1	1	−2	1	0	0
0	−1	−1	1	1	0
0	0	2	−3	−1	1
1	1	0	−2	−1	1
0	−2	0	−1	1	1
0	0	2	−3	−1	1
2	0	0	−5	−1	3
0	−2	0	−1	1	1
0	0	2	−3	−1	1

La réduite de Gauss de $A-I$ est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale, donc elle est inversible.

On trouve donc

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Remplaçons B par $I-N$ dans l'égalité $A+B=AB$; on obtient alors:

$$A+I-N=A(I-N)=A-AN$$

Après réduction, on obtient

$$I-N=-AN$$
$$I=N-AN=(I-A)N=N(I-A)$$

Il s'ensuit que N est inversible, d'inverse $I-A$. Il en résulte que

$$N=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$B=I-N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Un calcul rapide montre que

$$A+B=AB=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : on peut montrer que si A est un matrice telle que $I-A$ soit inversible, alors $A(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}A$.

En effet, on a $(I-A)A=A(I-A)$; en multipliant à gauche et à droite par $(I-A)^{-1}$, on obtient immédiatement, $A(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}A$

Il en résulte que pour $B=I-(I-A)^{-1}$, on a :

$$BA=\left[I-(I-A)^{-1}\right]A=A-(I-A)^{-1}A$$

En utilisant la remarque ci-dessus :

$$BA=A-A(I-A)^{-1}=A\left[I-(I-A)^{-1}\right]=AB$$

1. <u>Cas général</u>

Supposons $A+B=AB$. Remplaçons B par $I-N$ dans l'égalité $A+B=AB$; on obtient alors:

$$A+I-N=A(I-N)=A-AN$$

Après réduction, on obtient

$$I-N=-AN$$
$$I=N-AN=(I-A)N \qquad (*)$$

Ce qui prouve que $I-A$ est une matrice inversible d'inverse égal à N c'est à dire $I-B$.

Réciproquement, si $I-A$ est une matrice inversible, d'inverse égal à N, alors

$$(I-A)N=N-AN=I$$

En transposant:

$$I-N=-AN$$

Enfin, en rajoutant A dans chaque membre,

$$A+I-N=A-AN=A(I-N)$$

Ce qui prouve qu'il existe une matrice $B=I-N$ telle que $A+B=AB$.
Pour montrer que $AB=BA$, on va remplacer N par $I-B$ dans la relation (*), on obtient:

$$(I-A)(I-B)=I$$

Les deux matrices $I-A$ et $I-B$ étant inverse l'une de l'autre, elles commutent et donc:

$$(I-A)(I-B)=(I-B)(I-A)$$

Soit

$$I-(A+B)+AB=I-(B+A)+BA$$

Après réduction dans chaque membre, on obtient finalement $AB=BA$.

Suites, probabilités et intégrales

L'exercice ci-dessous est un exercice d'analyse pouvant être traité indépendamment de toute application ; toutefois, il serait dommage de le séparer de l'application immédiate en probabilités qui en découle.
L'exercice 5, extrait du sujet du BAC C d'Aix en Provence 1981, peut être traité aussi bien par les étudiants en option économique que par les étudiants en option scientifique. Toutefois les étudiants en option économique admettront les relations (1) et (2) des questions 2 et 3.

Exercice 3 (★)

1. Soit x un nombre réel élément de $]0,1[$ et r un entier naturel fixé non nul. On considère la suite
$(u_n):\ u_n = C_{r+n}^{n} x^n$
En calculant la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ montrer que (u_n) est convergente de limite 0. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq k} C_n^k x^n$ pour tout réel x élément de $[0,1[$. On note
$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.
3. Vérifier que pour tout réel x de $[0, 1[$:
$s_0(x) = \frac{1}{1-x}$ $\qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$
4. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0, 1[$, montrer que
$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$
5. Montrer, par récurrence :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, 1[,\ s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. On va donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. D'abord,
$$C_{r+n}^{n} = \frac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)n!}{(r+n-n)!\,n!}$$
Ainsi,
$$C_{r+n}^{n} = \frac{n^r\left(1+\frac{r}{n}\right)\left(1+\frac{r-1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}{r!}$$
Et par suite, on en déduit que
$$C_{n+r}^{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!} \qquad (1)$$
Il s'ensuit que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!} x^n$$
On a alors,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{r!\,(n+1)^r}{r!\ \ n^r} \frac{x^{n+1}}{x^n}$$
après réduction:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^r x \underset{n\to+\infty}{\sim} x$$
Soit d le plus petit des 2 nombres x et $1-x$; il existe un rang N à partir duquel
$$0 < x - \frac{d}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < x + \frac{d}{2} < 1$$
par une récurrence immédiate, pour tout entier naturel n supérieur à N,
$$0 < \frac{u_n}{u_N} < \left(x+\frac{d}{2}\right)^{n-N}$$
A la limite, par un célèbre théorème de gendarmerie, on déduit:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_N} = 0$$
et aussi $\lim_{+\infty}(u_n) = 0$
La série de terme général u_n est une série à termes positifs telle qu'il existe un rang N à partir duquel
$$0 \leq u_n \leq \left(x+\frac{d}{2}\right)^{n-N} u_N$$
avec $x+\frac{d}{2} \in]0,1[$; la série, définie pour n supérieur ou égal à N, par son terme général
$$v_n = \left(x+\frac{d}{2}\right)^{n-N} u_N$$
est une série géométrique convergente car de raison comprise strictement entre –1 et 1. Par le critère de comparaison, $\sum u_n$ est convergente.
2. La série $\sum_{n\geq k} C_n^k x^n$ peut aussi s'écrire, par changement de variable, en posant $n' = n - k$ et en « déprimant », $\sum_{n\geq 0} C_{n+k}^{k} x^{n+k} = \sum_{n\geq 0} C_{n+k}^{n} x^{n+k}$; la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} C_{k+n}^{n} x^n$ a été établie dans la question précédente en remplaçant k par r.
3. Pour tout x appartenant à $[0, 1[$, on a :
$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^0 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
On reconnaît la somme d'une série géométrique puisque $|x|<1$; on a :
$$s_0(x) = \frac{1}{1-x}$$
Le calcul de $s_1(x)$ revient à montrer que $(1-x)\,s_1(x) = xs_0(x)$; on a :

$$(1-x)\, s_1(x)=(1-x)\sum_{n\ge 0} C_n^1 x^n=\sum_{n\ge 0} C_n^1 x^n-\sum_{n\ge 0} C_n^1 x^{n+1}$$

$$(1-x)\, s_1(x)=\sum_{n\ge 0} nx^n-\sum_{n\ge 0} nx^{n+1}=\sum_{n\ge 1} nx^n-\sum_{n\ge 2}(n-1)\,x^n$$

La deuxième égalité étant obtenue en remarquant que les sommes commencent à 1 et en effectuant le changement de variable $n' = n + 1$.

$$(1-x)\, s_1(x)=x+\sum_{n\ge 2}\left[n-(n-1)\right]x^n=\sum_{n\ge 1} x^n=x\sum_{n\ge 1} x^{n-1}=x\sum_{n\ge 0} x^n$$

La dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $n' = n - 1$. Ainsi, on a bien, $(1-x)\, s_1(x)=xs_0(x)$ ce qui démontre l'égalité.

4. Pour tout réel x appartenant à $[0\,,1[$, on a :

$$s_{k+1}(x)=\sum_{n\ge k+1} C_n^{k+1}x^n=\sum_{n\ge k} C_{n+1}^{k+1}x^{n+1}$$

La dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $n' = n + 1$. On utilise la formule de Pascal:

$$s_{k+1}(x)=\sum_{n\ge k} C_{n+1}^{k+1}x^{n+1}=x^{k+1}+x\sum_{n\ge k+1}\left(C_n^k+C_n^{k+1}\right)x^n$$

$$s_{k+1}(x)=x^{k+1}+x\sum_{n\ge k+1} C_n^k x^n+x\sum_{n\ge k+1} C_n^{k+1}x^n$$

On remarque que $x^{k+1}+x\sum_{n\ge k+1} C_n^k x^n=x\left(x^k+\sum_{n\ge k+1} C_n^k x^n\right)=x\sum_{n\ge k} C_n^k x^n$; on en déduit :

$$s_{k+1}(x)=xs_k(x)+xs_{k+1}(x)$$

5. Pour $k = 0$, on a bien pour tout réel x appartenant à $[0\,,1[$,

$$s_0(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{x^0}{(1-x)^{0+1}}$$

On suppose la propriété vérifiée à un rang k quelconque fixé ; pour $k + 1$:

$0\le x<1$ et $s_{k+1}(x)=xs_k(x)+xs_{k+1}(x)\ \Rightarrow\ (1-x)s_{k+1}(x)=xs_k(x)$

Et par suite :

$$s_{k+1}(x)=\frac{x}{1-x}s_k(x)=\frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel k et pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$, on a :

$$s_k(x)=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Exercice 4 (★) – Utilise l'exercice 3

Une entreprise de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un produit commercial A.

Pour tout n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère un échantillon de $10n$ personnes et on suppose que parmi elles, on a toujours $3n$ personnes satisfaites du produit A. On interroge au hasard 20 personnes de cet échantillon et on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de consommateurs de ce groupe, satisfaits du produit A.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z_n.
2. Pour chaque valeur de k, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(Z_n=k)$.

Corrigé de l'exercice 4

L'univers de Z_n est inclus dans $\{0,1,\cdots,20\}$.

Pour $n = 2$, il y a 20 personnes interrogées dont 6 sont satisfaites du produit A. Z_2 suit une loi certaine : $p(Z_2=6)=1$.

Pour $2 < n < 7$, il y a plus de 20 personnes qui ne sont pas satisfaites du produit A et exactement $3n$ personnes, c'est-à-dire moins de 20, qui sont satisfaites ; dans ce cas, $Z_n(\Omega)=\{0,1,\cdots,3n\}$.

Pour $n \ge 7$, il y a plus de 20 personnes qui ne sont pas satisfaites du produit A et exactement $3n$ personnes, c'est-à-dire plus de 20, qui sont satisfaites ; $Z_n(\Omega)=\{0,1,\cdots,20\}$

Dans ces deux derniers cas, Z_n suit une loi hypergéométrique de paramètres $10n$, 20, $3n$.

$$\forall k\in Z_n(\Omega),\quad p(Z_n=k)=\frac{C_{3n}^k C_{7n}^{20-k}}{C_{10n}^{20}}$$

La relation (1) de l'exercice précédent permet d'écrire :

$$C_N^k=C_{(N-k)+k}^k\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{(N-k)^k}{k!}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{N^k}{k!}$$

Donc nous en déduisons :

$$\forall k\in Z_n(\Omega),\quad p(Z_n=k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(3n)^k}{k!}\cdot\frac{(7n)^{20-k}}{(20-k)!}\cdot\frac{n!}{(10n)^{20}}$$

Ce qui peut s'écrire, après avoir remarqué que $(10n)^{20}=(10n)^k(10n)^{20-k}$,

$$\forall k\in Z_n(\Omega),\quad p(Z_n=k)\underset{n\to+\infty}{\sim}C_{20}^k\left(\frac{3n}{10n}\right)^k\cdot\left(\frac{7n}{10n}\right)^{20-k}$$

Après simplification,

$$\forall k\in Z_n(\Omega),\quad p(Z_n=k)\underset{n\to+\infty}{\sim}C_{20}^k\left(\frac{3}{10}\right)^k\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{20-k}$$

Ou encore

$$\forall k\in Z_n(\Omega),\quad \lim_{n\to+\infty} p(Z_n=k)=C_{20}^k\left(\frac{3}{10}\right)^k\cdot\left(1-\frac{3}{10}\right)^{20-k}$$

On dit que la suite des variables (Z_n) *converge en loi* vers la variable Z qui suit une loi binomiale de paramètre 20, $\frac{3}{10}$.

Exercice 5 (💣)

On note $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0 et de 1. On considère les suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}', \quad u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ \forall n \in \mathbb{N}', \quad v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\times n} \end{cases}$$

1. Déterminer deux réels A et B tels que, pour tout n élément de $\mathbb{N}'$,

$$\frac{1}{(n-1)\times n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}$$

En déduire, pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}'$, une expression de v_n en fonction de n.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}'$, $u_n \le v_n$; en déduire que la suite u est convergente (on ne cherchera pas sa limite notée λ).

2. Soit t un élément de $[0, \pi]$; on pose, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$,

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad et \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt$$

Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} C_n(0) = n \\ C_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{si } t \in]0, \pi] \end{cases} \qquad (1)$$

L'application C_n est-elle continue sur $[0, \pi]$?

3. Vérifier que pour tout t élément de $]0, \pi]$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$,

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad (2)$$

et montrer que l'application qui à t appartenant à $]0, \pi]$ associe le réel $\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ peut être prolongée en une fonction g_n continue sur $[0, \pi]$.

4. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$$

En déduire que

$$u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) \, dt$$

puis que pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t) \, dt$$

5. On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(t) = \dfrac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout t appartenant à $[0, \pi]$, $0 \le f(t) \le M$.

6. Soit a un réel quelconque, $0 < a < \pi$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left| \int_0^{a} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \le aM$$

7. Montrer que f est de classe C^1 sur $[a, \pi]$; en déduire qu'il existe un réel M' tel que pour tout t appartenant à $[a, \pi]$, $|f'(t)| \le M'$.

8. On pose, pour n entier naturel,

$$I_n = \int_a^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$$

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0 \quad \text{puis que} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$$

Corrigé de l'exercice 5

1. Par identification, on obtient immédiatement :

$$(\forall n \in \mathbb{N}', \quad An + B(n-1) = 1\ ) \Leftrightarrow B = -1 \text{ et } A = 1$$

On a

$$v_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$v_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

Donc, pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}'$, $v_n = 2 - \frac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$$

En rajoutant 1 à chaque membre, on obtient $u_n \leq v_n$. Par ailleurs, la suite v est majorée par 2, il en résulte donc que u est majorée par 2. Enfin, pour tout n supérieur ou égal à 2,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ et $u_2 - u_1 = \frac{1}{2^2} \geq 0$; la suite u est donc croissante.

Récapitulons : u est croissante et majorée (par 2), donc elle est convergente.

2. Le calcul de $C_n(t)$ doit être connu par cœur de tout étudiant en fin de première année. Nous en reprenons rapidement les grandes lignes.

Il est clair que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $C_n(0) = n$ puisque $\cos 0 = 1$.

Soit $t \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$C_n(t) + iS_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1,

$$C_n(t) + iS_n(t) = e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = e^{it}\frac{e^{\frac{int}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}}\cdot\frac{e^{-\frac{int}{2}} - e^{\frac{int}{2}}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = e^{\frac{i(n+1)t}{2}}\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

En prenant la partie réelle,

$$C_n(t) = \cos\frac{(n+1)t}{2}\cdot\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

Ainsi la fonction C_n est bien définie par :

$$\begin{cases} C_n(0) = n \\ C_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0,\pi] \end{cases}$$

Cette fonction est clairement continue sur $]0,\pi]$ comme « formule » de fonctions continues et

$$\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} = n \quad\Rightarrow\quad C_n(t) \underset{t\to0}{\sim} n\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)$$

D'autre part, $\lim_{t\to0}\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = 1$; donc $\lim_{t\to0} C_n(t) = n = C_n(0)$ et C_n est continue en 0 ; par suite C_n est continue sur $[0,\pi]$.

3. Réduisons, pour n élément de $\mathbb{N}^*$ et t élément de $]0,\pi]$, $1 + 2C_n(t)$. On reconnaît (on doit reconnaître) $2\cos a \sin b = \sin(b+a) + \sin(b-a)$

$$1 + 2C_n(t) = 1 + \frac{2\cos\frac{(n+1)t}{2}\cdot\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$1 + 2C_n(t) = 1 + \frac{\sin\left(\frac{nt}{2} + \frac{(n+1)t}{2}\right) + \sin\left(\frac{nt}{2} - \frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$$

Après réduction,

$$1+2C_n(t)=1+\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}+\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}=1+\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$$

Et finalement,

$$1+2C_n(t)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Considérons l'application qui à tout réel t de $]0,\pi]$ associe le réel $\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. Elle est continue car elle coïncide avec $t\mapsto 1+2C_n(t)$ sur $]0,\pi]$, qui est clairement continue car C_n est continue et de plus on a

$$\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{\frac{2n+1}{2}t}{\frac{t}{2}}=2n+1$$

Cette application peut donc être prolongée en une application g_n définie par :

$$\begin{cases} g_n(0)=2n+1 \\ g_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{si } t\in\,]0,\pi] \end{cases}$$

et g_n continue sur $[0,\pi]$. On notera ainsi que pour tout réel t appartenant à $[0,\pi]$

$$g_n(t)=1+2C_n(t)$$

4. Soit n un entier naturel non nul. Faisons, rapidement, une intégration par parties en laissant le soin au lecteur de la justifier :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\,dt=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sin nt\right]_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin nt\,dt$$

En remarquant que $\sin(n\pi)=\sin 0=0$ et en faisant une deuxième intégration par parties :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\,dt=-\frac{1}{n}\left(\left[-\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos nt\right]_0^\pi+\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\cos nt\,dt\right)$$

Or $\int_0^\pi\cos nt\,dt=\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^\pi=0$; donc, après réduction :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\,dt=\frac{1}{n^2}$$

En particulier, pour $n = 1$, on a :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=1=u_1$$

Immédiatement, pour $n\geq 2$:

$$u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^n\cos kt\,dt$$

$$u_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)\,dt$$

relation aussi vérifiée pour $n = 1$.

Réduisons l'intégrale $\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt$;

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)(1+2C_n(t))\,dt$$

Soit encore:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt+\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)C_n(t)\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt-u_n$$

Enfin le calcul de $\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt$ nous donne,

$$\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{3}$$

Il e n résulte que

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt=\frac{\pi^2}{6}-u_n$$

5. On considère la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(t)=\dfrac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{cases}$$

Il est clair que cette fonction est continue sur $]0,\pi]$; de plus

$$\frac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{\frac{t}{2}}=2$$

d'où la continuité de f en 0 et par suite sur $[0,\pi]$. La fonction f étant continue sur un segment, elle est majorée sur ce segment ; il existe un réel M tel que pour tout t appartenant à $[0,\pi]$, $f(t)\le M$. On notera que sur $]0,\pi]$, la fonction $t\mapsto \sin\frac{t}{2}$ est positive (et même strictement positive car $\frac{t}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$) et $t-\frac{t^2}{2\pi}=t\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)\ge 0$. Il s'ensuit que pour tout t appartenant à $[0,\pi]$, $0\le f(t)$.

Récapitulons ; pour tout t appartenant à $[0,\pi]$, $0\le f(t)\le M$.

6. Soit a un réel quelconque, $0<a<\pi$. Pour tout entier naturel n,

$$\left|\int_0^a f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|\le\int_0^a\left|f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|dt$$

Et donc,

$$\left|\int_0^a f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|\le\int_0^a|f(t)|\,dt\le M\int_0^a dt=aM$$

7. Soit a un réel quelconque, $0<a<\pi$. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas. Il s'ensuit que f est de classe C^1 sur $[a,\pi]$ et donc que sa dérivée est bornée sur $[a,\pi]$. Il existe un réel M' tel que, pour tout t appartenant à $[a,\pi]$, $|f'(t)|\le M'$.

8. Soit $I_n=\int_a^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$; on pose pour t appartenant à $[a,\pi]$:

$$u'(t)=\sin\frac{(2n+1)t}{2} \qquad u(t)=-\frac{2}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)t}{2}$$
$$v(t)=f(t) \qquad v'(t)=f'(t)$$

les deux fonctions u et v sont de classes C^1 sur $[a,\pi]$ et donc

$$I_n=\left[-\frac{2}{2n+1}f(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right]_a^\pi+\frac{2}{2n+1}\int_a^\pi f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\frac{2}{2n+1}f(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right]_a^\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{2}{2n+1}\left[f(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right]_a^\pi=0$ car f et cos sont deux fonctions bornées sur $[a,\pi]$. On a aussi

$$\frac{2}{2n+1}\left|\int_a^\pi f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|\le\frac{2}{2n+1}\int_a^\pi\left|f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|dt$$

$$\frac{2}{2n+1}\left|\int_a^\pi f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|\le\frac{2}{2n+1}\int_a^\pi|f'(t)|\,dt\le\frac{2M'\pi}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Enfin, on a montré dans la 4ème question que pour tout n supérieur à 1,

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt$$

On peut écrire, $\forall a\in]0,\pi[$, $\forall n\ge 1$,

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^a\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_a^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt$$

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^a\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_a^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^a\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt+\frac{1}{2}I_n$$

La fonction $t\mapsto\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)$ coïncide avec la fonction $t\mapsto f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)$ sur l'intervalle $]0,a]$, et toutes les deux sont continues en 0 (questions 3 et 5). Les deux fonctions coïncident donc sur $[0,a]$ et

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^a\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^a f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|\le a\frac{M}{2}$$

le réel a étant arbitraire, on peut le choisir aussi proche de 0 qu'on voudra, et par suite,

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{2}\int_0^a\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,dt+\frac{1}{2}I_n\right)=\frac{1}{2}I_n$$

On a donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi^2}{6}-u_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}I_n\right)=0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\frac{\pi^2}{6}$$

Droites affines dans le plan et plans affines dans l'espace

Dans le programme officiel, nous trouvons en travaux pratiques pour les premières années en option scientifique, les équations de droites affines dans le plan et de plans affines dans l'espace. En seconde année, se rajoutent les équations normales de droites affines dans le plan et de plans affines dans l'espace.
Toutefois, nous conseillons vivement aux étudiants en option économique de prendre connaissance de ce qui suit ; si les exercices proposés sont extrêmement élémentaires c'est pour leur permettre de les faire, car cela leur sera d'une grande utilité en deuxième année.

A Droites dans le plan affine

Le plan affine est le plan usuel de la géométrie rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$; tout point du plan a deux coordonnées : une abscisse et une ordonnée. On a l'équivalence suivante :

$$M(x,y)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

Si A et B sont deux points du plan de coordonnées respectives (a, a') et (b, b'), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(b-a, b'-a')$. La droite passant par les deux points distincts A et B est notée (AB) et elle est définie de la façon suivante :

$$(AB)=\left\{M\in\mathcal{P}\ /\ \exists t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}\right\}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) ou que le couple $\left(A,\overrightarrow{AB}\right)$ est un repère de la droite (AB). Une équation (appelée aussi équation cartésienne) de la droite (AB) est une relation entre les coordonnées x et y (ou sur l'une des coordonnées seulement) des points M de (AB) indépendante de t. Concrètement, si $A(a, a')$ et $B(b, b')$, alors si $M(x, y)$ est un point de la droite (AB),il existe un réel t tel que

$$(x-a)\vec{i}+(y-a')\vec{j}=t(b-a)\vec{i}+t(b'-a')\vec{j}$$

D'où le système qu'on appellera « représentation paramétrique de la droite (AB) »

$$\begin{cases}x-a=t(b-a)\\ y-a'=t(b'-a')\end{cases}$$

On dégage alors une relation, éventuellement entre x et y, indépendante de t.

Si $\overrightarrow{AB}(b-a,b'-a')$ est un vecteur directeur d'une droite et si son abscisse $b-a$ n'est pas nul, alors on dit que le rapport $\dfrac{b'-a'}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

<u>*Exemple :*</u>
Soit, dans le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points $A(2, -1)$, $B(1, 2)$ et $C(2, 2)$.

Déterminer les équations de droites (AB), (AC) et (BC). Préciser, s'il y a lieu, leur coefficient directeur.

a) D'abord $\overrightarrow{AB}=(1-2)\vec{i}+(2-(-1))\vec{j}=-\vec{i}+3\vec{j}$; de même,

$\overrightarrow{AC}=(2-2)\vec{i}+(2-(-1))\vec{j}=3\vec{j}$ et $\overrightarrow{BC}=(2-1)\vec{i}+(2-2)\vec{j}=\vec{i}$

b) Soit $M(x, y)$ un point de la droite (AB) ; il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow (x-2)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=t(-\vec{i}+3\vec{j})$$

D'où le système, représentation paramétrique de la droite (AB) :

$$\begin{cases}x-2=-t\\ y+1=3t\end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $3(x-2)+(y+1)=0$. On écrit :

$$(AB):\ 3x+y-5=0$$

$\overrightarrow{AB}(-1,3)$ est un vecteur directeur de (AB) et son abscisse n'est pas nulle. La droite (AB) a pour coefficient directeur -3.

c) Soit $M(x, y)$ un point de la droite (AC) ; il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow (x-2)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=t(3\vec{j})$$

D'où le système :

$$\begin{cases}x-2=0\\ y+1=3t\end{cases}$$

Il n'y a aucune contrainte sur y ; On en déduit ici que $x-2=0$. On écrit :

$(AC):\ x=2$

$\overrightarrow{AC}(0,3)$ est un vecteur directeur de (AC) et son abscisse est nulle. Cette droite n'a pas de coefficient directeur. Cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

d) Soit $M(x, y)$ un point de la droite (BC) ; il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{BM}=t\cdot\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-1)\vec{i}+(y-2)\vec{j}=t\vec{i}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} x-1=t \\ y-2=0 \end{cases}$$

Il n'y a aucune contrainte sur x ; On en déduit ici que $y-2=0$. On écrit :

$$(BC):\ y-2=0$$

$\overrightarrow{BC}(1,0)$ est un vecteur directeur de (BC) et son abscisse n'est pas nulle. La droite (BC) a pour coefficient directeur 0. Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Nous conseillons à l'étudiant studieux de représenter graphiquement ces trois droites ainsi qu'un de leur vecteur directeur.

Exercice 6 (★)

Soit $A(-1,-1)$, $B(1,5)$ et $C(3,-2)$ trois points du plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', B' et C'.
2. Déterminer des équations des droites (AA'), (BB') et (CC').
3. Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point G qu'on précisera.
4. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{A'G}$ et réduire $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Par définition, A' milieu de [BC] équivaut à $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$. On laisse le soin au lecteur de montrer que si $A'(a'_1, a'_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$ alors $a'_1=\dfrac{b_1+c_1}{2}$, $a'_2=\dfrac{b_2+c_2}{2}$.

   On obtient donc $A'\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$, de même, $B'\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$ et $C'(0,2)$

2. On trouve immédiatement $\overrightarrow{AA'}\left(3,\dfrac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB'}\left(0,-\dfrac{13}{2}\right)$ et $\overrightarrow{CC'}(-3,4)$

   Soit $M(x, y)$ un point de la droite (AA') ; il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (x+1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=t\left(3\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}\right)$$

   D'où le système :

$$\begin{cases} x+1=3t \\ y+1=\dfrac{5}{2}t \end{cases}$$

   On en déduit immédiatement que $\dfrac{5}{2}(x+1)-3(y+1)=0$. On écrit :

$$(AA'):\ \frac{5}{2}x-3y-\frac{1}{2}=0$$

   Allons un peu plus vite. Soit $M(x, y)$ un point de la droite (BB') ; il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{BM}=t\cdot\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-5=-\dfrac{13}{2}t \end{cases}$$

   Il n'y a aucune contrainte sur y. On a :

$$(BB'):\ x-1=0$$

   Soit $M(x, y)$ un point de la droite (CC') ; il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{CM}=t\cdot\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-3t \\ y+2=4t \end{cases}$$

   On en déduit immédiatement que $4(x-3)+3(y+2)=0$. On écrit :

$$(CC'):\ 4x+3y-6=0$$

3. Pour montrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point, il suffit de montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2}x-3y-\dfrac{1}{2}=0 \\ x \qquad -1=0 \\ 4x+3y-6=0 \end{cases}$$

   admet une solution unique.

   On a $x=1$; en remplaçant x par 1 dans la première et dans la dernière équation, on obtient $y=\dfrac{2}{3}$. Les trois droites sont donc concourantes au point $G\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$.

4. On a $\overrightarrow{AG}\left(2,\frac{5}{3}\right)$, $\overrightarrow{A'G}\left(-1,-\frac{5}{6}\right)$; sans surprise, on trouve $\overrightarrow{AG}=-2\cdot\overrightarrow{A'G}$. On a aussi

$$\overrightarrow{GA}\left(-2,-\frac{5}{3}\right),\ \overrightarrow{GB}\left(0,\frac{13}{3}\right) \text{ et } \overrightarrow{GC}\left(2,-\frac{8}{3}\right)$$ On vérifie donc que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Exercice 7 (★)

On reprend les points de l'exercice précédent.
Soit $A(-1,-1)$, $B(1,5)$ et $C(3,-2)$ trois points du plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer l'équation de la droite (*AB*) de la droite *D*, passant par *A* et de vecteur directeur $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$ et enfin de la droite passant par *C* et parallèle à (*AB*).

Corrigé de l'exercice 7

On trouve immédiatement $\overrightarrow{AB}(2,6)$
Soit $M(x, y)$ un point de la droite (*AB*) ; il existe un réel *t* tel que

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2t \\ y+1=6t \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $3(x+1)-(y+1)=0$. On écrit :

$$(AB):\ 3x-y+2=0$$

Soit $M(x, y)$ un point de la droite *D* ; il existe un réel *t* tel que

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-t \\ y+1=2t \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $2(x+1)+(y+1)=0$. On écrit :

$$D:\ 2x+y+3=0$$

Désignons par *D'* la droite passant par *C* et parallèle à (*AB*). Les deux droites *D'* et (*AB*) ont même vecteur directeur. Soit $M(x, y)$ un point de la droite *D'* ; il existe un réel *t* tel que

$$\overrightarrow{CM}=t\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2t \\ y+2=6t \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $3(x-3)-(y+2)=0$. On écrit :

$$D':\ 3x-y-11=0$$

L'exercice qui suit est une question de cours que tout étudiant reconnaîtra. Nous laissons le soin au lecteur de faire une figure pour accompagner la démonstration.

Exercice 8 (★)

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (1) suivante :

$$\forall a,b\in I,\quad \forall\lambda\in[0,1],\quad f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

En donner une interprétation graphique.

Corrigé de l'exercice 8

Gagné ; c'est bien la définition d'une fonction convexe. Voyons ce que signifie cette propriété.
Soit $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$ les points situés sur (O*x*) d'abscisses respectives *a* et *b*. Soit $M(\lambda a+(1-\lambda)b, 0)$; on a $\overrightarrow{OM}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{OB}$, c'est-à-dire, en utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BA}$, ou encore, $\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\overrightarrow{BA}$; le réel λ étant compris entre 0 et 1, le point *M* est compris entre *A* et *B*. Réciproquement, si *M* est un point quelconque compris entre *A* de coordonnées $(a, 0)$ et *B* de coordonnées $(b, 0)$, alors il existe un réel λ compris entre 0 et 1, tel que $\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\overrightarrow{BA}$; en développant cette relation, on obtient $\overrightarrow{OM}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{OB}$ et donc *M* a pour coordonnées $(\lambda a+(1-\lambda)b, 0)$.
Il s'ensuit que l'ensemble des points $N(\lambda a+(1-\lambda)b,\ f(\lambda a+(1-\lambda)b))$ du plan, est l'arc de courbe limité par les points de coordonnées $A'(a, f(a))$ et $B'(b, f(b))$.
Déterminons une représentation paramétrique du segment de droite [*A'B'*]. Soit $M(x, y)$ un point de [*A'B'*], on a :

$$\exists\lambda\in[0,1],\quad \overrightarrow{A'M}=\lambda\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow$$

$$(x-a)\vec{i}+(y-f(a))\vec{j}=\lambda\left[(b-a)\vec{i}+(f(b)-f(a))\vec{j}\right]$$

D'où le système

$$\begin{cases} \lambda\in[0,1] \\ x-a=\lambda(b-a) \\ y-f(a)=\lambda(f(b)-f(a)) \end{cases}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} \lambda \in [0,1] \\ x = \lambda b + (1-\lambda)a \\ y = \lambda f(b) + (1-\lambda) f(a) \end{cases}$$

Il en résulte, pour λ fixé dans [0, 1], que les deux points

$$N\big(\lambda a + (1-\lambda)b,\ \ f(\lambda a + (1-\lambda)b)\big)$$

et

$$N'\big(\lambda a + (1-\lambda)b,\ \ \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\big)$$

sont, le premier, un point de l'arc *A'B'*, le second, le point du segment [*A'B'*] de même abscisse. La relation (1) montre que le point *N* est en dessous de *N'*. L'arbitraire sur les réels *a* et *b* de *I* et sur le réel λ, implique que tout point de tout arc de la courbe de la fonction *f* est en dessous de la corde sous-tendant cet arc.

Réciproquement, si tout point de tout arc de la courbe de la fonction *f* est en dessous de la corde sous-tendant cet arc, alors quel que soit les réels *a* et *b* de *I*, quel que soit le réel λ compris entre 0 et 1, le point $N\big(\lambda a + (1-\lambda)b,\ \ f(\lambda a + (1-\lambda)b)\big)$

est en dessous du point

$$N'\big(\lambda a + (1-\lambda)b,\ \ \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\big)$$

et donc

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Exercice 9 (★)

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, c'est-à-dire $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i}, \vec{j}$ orthogonaux. On admettra la propriété suivante. Si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors on a l'équivalence :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$$

On considère la fonction *f* définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

Déterminer les fonctions *g* de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles qu'en tout point $M(x_0, f(x_0))$ et $N(x_0, g(x_0))$, les tangentes respectives aux courbes de *f* et de *g* soient perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 9

Deux droites sont perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Au point $M(x_0, f(x_0))$ le coefficient directeur de la tangente est $\dfrac{1}{x_0}$; un vecteur directeur a donc pour coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{x_0}\right)$. Un vecteur directeur de la tangente à la courbe de *g* en $N(x_0, g(x_0))$ est $(1, g'(x_0))$.

Les deux tangentes sont perpendiculaires si $1 + \dfrac{1}{x_0} g'(x_0) = 0$. La fonction *g* vérifie pour tout réel *x* de $]0, +\infty[$, $g'(x) = -x$. Ainsi, une fonction *g* a ses tangentes en chacun de ses points perpendiculaires aux tangentes aux points de même abscisse de la courbe de *f* si, et seulement si, il existe une constante *c* telle que $g(x) = -\dfrac{x^2}{2} + c$.

B Plans dans l'espace affine.

L'espace affine est l'espace usuel de la géométrie rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; tout point de l'espace a trois coordonnées : une abscisse, une ordonnée et une cote. On a l'équivalence suivante :

$$M(x, y, z) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Si *A* et *B* sont deux points de l'espace de coordonnées respectives (*a*, *a'*, *a''*) et (*b*, *b'*, *b''*), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (*b* – *a*, *b'* – *a'*, *b''* – *a''*). Le plan passant par les trois points distincts *A*, *B* et *C* est notée (*ABC*) et il est défini de la façon suivante :

$$(ABC) = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / \ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \right\}$$

Le triplet $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère de (*ABC*). Une équation (appelée aussi équation cartésienne) du plan (*ABC*) est une relation entre les coordonnées *x*, *y* et *z* (ou sur une ou deux des coordonnées seulement) des points *M* de (*ABC*) indépendante de *a* et de *b*. Sans plus tarder, donnons un …

Exemple :

Soit, dans l'espace rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points *A*(2, –1, 1), *B*(0, –1, 2) et *C*(1, 2, 2). Déterminer une équation du plan passant par ces trois points.

Commençons par déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a $\overrightarrow{AB}(-2,0,1)$, $\overrightarrow{AC}(-1,3,1)$ et $\overrightarrow{BC}(1,3,0)$. Pour avoir le moins de calculs possibles, nous choisissons $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ comme repère du plan (ABC). Si $M(x, y, z)$ est un point de ce plan, alors

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{BA} + \beta \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y+1 = 3\beta \\ z-2 = -\alpha \end{cases}$$

On en déduit aussitôt une équation de (ABC) : $3x = -6(z-2) + (y+1)$; après réduction, on obtient :

$$(ABC) : 3x - y + 6z - 13 = 0$$

Bien sûr, tout autre repère du plan (ABC) convenait et permettait d'obtenir la même équation.

Exercice 10 (★)

Soit, dans l'espace rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(-1, 1, 0)$, $B(2, 5, 2)$, $C(-1, -4, -1)$ et $D(0, 1, 2)$. Déterminer une équation du plan (ABC) et du plan parallèle à (ABC) passant par D.

Corrigé de l'exercice 10

Commençons par déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a $\overrightarrow{AB}(3,4,2)$ et $\overrightarrow{AC}(0, -5, -1)$. Si $M(x, y, z)$ est un point du plan (ABC), alors

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3\alpha \\ y-1 = 4\alpha - 5\beta \\ z = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

On en déduit aussitôt une équation du plan (ABC) : $2(x+1) + (y-1) - 5z = 0$; après réduction, on écrit :

$$(ABC) : 2x + y - 5z + 1 = 0$$

Déterminons une équation du plan $\mathcal{P}$ de repère $\left(D, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Si $M(x, y, z)$ est un point du plan $\mathcal{P}$, alors

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{DM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha \\ y-1 = 4\alpha - 5\beta \\ z-2 = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

On en déduit aussitôt une équation du plan $\mathcal{P}$: $2x + (y-1) - 5(z-2) = 0$; après réduction, on écrit :

$$\mathcal{P} : 2x + y - 5z + 9 = 0$$

Fonctions numériques

Dans l'exercice qui suit, on veut mettre en lumière sur un exemple, le fait qu'une application définie sur un segment I, tel que l'image de tout segment inclus dans I soit encore un segment, ne caractérise en rien une application continue.

Exercice 11 (💣)

Soit f la fonction définie sur [0, 1] par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin\dfrac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On se propose de montrer que l'image de tout segment inclus dans [0, 1] est un segment.

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Montrer que l'image par f de tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 1]$ est un segment.
3. Soit ε un réel strictement positif plus petit que 1/10. Montrer que quel que soit le réel α appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il existe un entier naturel N tel que $\dfrac{1}{2\pi N + \alpha} \in \left]0, \varepsilon\right[$. En déduire que l'image de tout segment $[0, \varepsilon]$ par f est un segment.

   Conclure.

Corrigé de l'exercice 11

1. Si f est continue en 0, la suite image de toute suite convergente de limite 0 admet $f(0)$ pour limite ; or la suite $\left(\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)_{n\geq 1}$ est convergente de limites 0 tandis que son image, la suite $\left(\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\geq 1}$, est une suite constante égale à 1. Il en résulte que f n'est pas continue en 0.
2. f est une fonction continue sur $[a, b]$ donc l'image de $[a, b]$ est un segment.
3. Soit ε un réel positif plus petit que 1/10. Montrer que pour tout réel α appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, il existe un entier N tel que $0<\dfrac{1}{2\pi N+\alpha}<\varepsilon$, revient à montrer que pour tout réel α appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, il existe un entier N tel que $\frac{1}{\varepsilon}<2\pi N+\alpha$. Or $\frac{1}{\varepsilon}$ est plus grand que 10 et $\frac{\pi}{2}$ est plus petit que 10 ; donc $\frac{1}{\varepsilon}-\alpha$ est un réel strictement positif ; la relation $\frac{1}{\varepsilon}<2\pi N+\alpha$ est équivalente à $N>\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\alpha\right)$; on peut choisir pour N, n'importe quelle valeur strictement supérieure à la partie entière de $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\alpha\right)$. Pour cette valeur de N, le nombre $x=\dfrac{1}{2\pi N+\alpha}$ est élément de $]0,\varepsilon[$ et
$\sin\frac{1}{x}=\sin(2N\pi+\alpha)=\sin\alpha\cdot$
Etant donné un réel β quelconque de $[-1, 1]$, il existe un réel α et un seul de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha=\beta$. Il existe un entier naturel N et un réel x appartenant à $[0, \varepsilon]$ tel que $N>\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\alpha\right)$ et $x=\dfrac{1}{2\pi N+\alpha}$ pour lequel on a $f(x) = \beta$. Ainsi l'image de tout segment $[0,\varepsilon]$ par f contient le segment $[-1, 1]$; comme, par ailleurs, $f([0,\varepsilon])\subset[-1,1]$, on en déduit que $f([0,\varepsilon])=[-1,1]\cdot$
4. Récapitulons :
Soit $[a, b]$ un segment de $[0, 1]$
Si $a\in\,]0,1[$, alors $f([a,b])$ est un segment
Si $a = 0$ et $b < 1/10$, alors $f([a,b])$ est un segment, le segment $[-1, 1]$
Si $a = 0$ et $b\in[1/10;1]$ alors l'inclusion $[0;1/100]\subset[0;b]$ implique la relation $[-1,1]=f([0;1/100])\subset f([0;b])\subset[-1,1]$; ainsi $f([a,b])$ est encore un segment, le segment $[-1, 1]$.
Donc l'image de tout segment de $[0, 1]$ par f, est un segment bien que f ne soit pas continue sur $[0, 1]$ (elle n'est pas continue en 0 puisque deux suites distinctes (u_n) et (v_n), $u_n=\dfrac{1}{2\pi n}$ et $v_n=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ sont convergentes vers 0 et les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont constantes et donc convergentes de limites respectives 0 et 1).

L'exercice ci-dessous est très classique, et ne devrait être ignoré d'aucun étudiant de seconde année.

Exercice 12 (★★) : concavité de la fonction ln (d'après bac D, Madagascar 1977)

1 Soit α un réel vérifiant $0<\alpha<1$. Etudier les variations de la fonction f_α définie par :
$$f_\alpha(x)=\ln(1-\alpha+\alpha x)-\alpha\ln x$$
Préciser l'ensemble de définition de la fonction f_α et établir son tableau de variation.

2 Montrer que si a et r sont deux réels vérifiant $0\leq a\leq 1$ et $r>0$ alors ils vérifient l'inégalité :
$$\ln(1-a+ar)\geq a\ln r$$
En déduire que si quatre réels u, v, X et Y sont tels que $u\geq 0,\ v\geq 0,\ u+v=1,\ X>0,\ Y>0$, alors ils vérifient l'inégalité :
$$\ln(uX+vY)\geq u\ln X+v\ln Y$$
Préciser les conditions pour lesquelles on a l'égalité.

3 Montrer que si u, v, w, X, Y, Z sont six réels tels que $u>0,\ v>0,\ w>0,\ u+v+w=1$ et $X>0,\ Y>0,\ Z>0$, alors, en posant $t=v+w$ et $tT=vY+wZ$, on a l'inégalité :
$$\ln(uX+vY+wZ)\geq u\ln X+v\ln Y+w\ln Z$$
Préciser les conditions pour lesquelles on a l'égalité.

4 Application :
Montrer que si a, b et c sont trois réels positifs, ils vérifient toujours les inégalités :
$$a+b+c\geq\sqrt[3]{abc}\quad \sqrt{ab+ac+bc}\geq\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{abc}\quad a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$