Corrigés des épreuves de mathématiques sp (voie S et voie E)

François Delaplace (voie E), **Pierre Girard** (voie S)
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique

EMLYON

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 3 mai 2004 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

I - Étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$

On note $F :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}du.$$

. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$: $\quad F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}du.$
En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b. De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c. En déduire que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ convergent, et que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du = \alpha - F(x)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du = \beta - G(x)$.

. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$ et tout réel $T \in]0\,;+\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

2004

écifiques à l'EM Lyon

Grandchamp (Versailles).

On note $A :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. a. Montrer : $\quad \forall x \in]0\,;1],\quad 0 \leqslant \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant -\ln x.$

b. En déduire que $\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

c. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

II - Étude de la fonction $x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \longmapsto t^k\,\mathrm{e}^{-xt}$ est bornée sur $[0\,;+\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^k\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout entier naturel k, $B_k :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par : $\quad B_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

2. a. Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad \left|\mathrm{e}^u - 1 - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2}\,\mathrm{e}^{|u|}.$$

b. En déduire, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \frac{x}{2}$:

$$\left|\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

c. Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad B_k'(x) = -B_{k+1}(x).$$

d. En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Montrer, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2},$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. a. Montrer : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$

b. Justifier, pour tout réel $y \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

et en déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$

c. En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III - Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$

On considère l'application $\varphi :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x),$$

où A a été définie dans la Partie ***I*** et B_0 a été définie dans la Partie ***II***.

On note $U :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$U(x) = \left(\varphi(x)\right)^2 + \left(\varphi'(x)\right)^2.$$

1. Montrer que U est constante sur $]0\,;+\infty[$.

2. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

3. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad A(x) = B_0(x).$

4. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les cœfficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geqslant 0$.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les cœfficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives

Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le cœfficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij}, et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les cœfficients de la matrice colonne P.

a. Montrer que $P > 0$.

b. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les cœfficients de la matrice colonne X. On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.

Établir que $c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

c. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser ***III.1.b***).
En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont égaux à 1.
Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

Donner une caractérisation des matrices productives.

Application : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

Premier problème

I- Etude de la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$$

1. Tout d'abord, on note que les intégrales définissant les fonctions F et G existent bien car, pour tout x de $]0;\infty[$, les fonctions définies, sur $[1;x]$, par : $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \dfrac{\cos u}{u}$ sont continues.

   a. Intégrons $F(x)$ par parties en posant $f(u) = -\cos(u)$ et $g(u) = \dfrac{1}{u}$. Les fonctions f et g sont C^1 sur $[1;x]$ et on peut écrire :

   $$F(x) = \int_1^x f'(u)g(u)\,du = [f(u)g(u)]_1^x - \int_1^x f(u)g'(u)\,du$$

   c'est à dire :

   $$\boxed{F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}du.} \tag{1}$$

   Pour tout x de $]0;\infty[$, La fonction h définie, sur $[1;x]$, par :

   $$u \mapsto h(u) = \frac{\cos u}{u^2}$$

   est continue sur $[1;x]$ et puisque $|h(u)| \leq \dfrac{1}{u^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$ existe (intégrale de Riemann avec un coefficient > 1), on en déduit d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du$ converge et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$ est absolument convergente, donc convergente ; ainsi, $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}du$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. De plus $\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$ donc, par le "théorème des gendarmes", $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ La relation (1) montre alors que F a bien une limite finie, α, en $+\infty$.

   b. De la même façon, on trouve

   $$\boxed{G(x) = \frac{\sin x}{x} - \sin 1 + \int_1^x \frac{\sin u}{u^2}du.} \tag{2}$$

   Pour tout x de $]0;\infty[$, La fonction k définie, sur $[1;x]$, par :

   $$u \mapsto k(u) = \frac{\sin u}{u^2}$$

   est continue sur $[1;x]$ et puisque $|k(u)| \leq \dfrac{1}{u^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$ existe , on déduit du critère de comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}du$ converge et donc que $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u^2}du$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. De plus $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$ donc, par le "théorème des gendarmes", $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. La relation (2) montre que G a bien une limite finie, β, en $+\infty$.

   c. Les résultats de a) et b) prouvent que

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

   existent et valent respectivement α et β, donc

   $$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

   existent aussi pour tout x strictement positif. La relation de Chasles donne alors,

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du + \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

   C'est à dire

   $$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \alpha - F(x) \text{ et de même } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \beta - G(x)$$

2. a. la fonction définie, sur $[0;T]$, par :

   $$t \mapsto \frac{\sin t}{t+x}$$

   est continue. Donc

   $$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt$$

   a bien un sens. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable (de classe C^1) $t \mapsto u = t + x$, on obtient

   $$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \int_x^{x+T} \frac{\sin u \cos x - \cos u \sin x}{u}\,du$$

   c'est-à-dire, par linéarité :

   $$\boxed{\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du} \tag{3}$$

   b. D'après la question 1.c. $\displaystyle\int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du$ ont, lorsque T tend vers $+\infty$, pour limites respectives les intégrales convergentes $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ ainsi $\displaystyle\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ a une limite lorsque T tend vers $+\infty$ et

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du} \tag{4}$$

3. les fonctions $\phi : u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ et $\psi : u \mapsto \dfrac{\cos u}{u}$ ont pour primitives respectives F et G qui sont donc des fonctions de classes C^1 sur $]0;\infty[$. La relation (4) du 2.b. prouve que pour tout x de $]0;\infty[$:

$$\boxed{A(x) = \cos x(\alpha - F(x)) - \sin x(\beta - G(x)).} \tag{5}$$

La fonction A est donc de classe C^1 sur $]0;\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions de cette classe. De plus, pour tout x de $]0;\infty[$:

$$\begin{aligned} A'(x) &= -\sin x(\alpha - F(x)) + \cos x(-\phi(x)) - \cos x(\beta - G(x)) - \sin x(-\psi(x)) \\ &= -\alpha \sin x + \sin x F(x) - \cos x\phi(x) - \beta \cos x + \cos x G(x) + \sin x \psi(x) \\ &= (F(x) - \alpha)\sin x + (G(x) - \beta)\cos x \end{aligned}$$

A' est donc aussi de classe C^1, ce qui prouve que A est de classe C^2 et, en dérivant l'égalité précédente,
$A"(x) = F'(x)\sin x + (F(x) - \alpha)\cos x + G'(x)\cos x - (G(x) - \beta)\sin x$
D'où, en simplifiant,
$A"(x) + A(x) = F'(x)\sin x + G'(x)\cos x$, c'est à dire,

$$A"(x) + A(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} = \frac{1}{x}.$$

4. La relation (5) du 3. et l'inégalité triangulaire prouvent que, pour tout x de $]0;\infty[$:

$$\begin{aligned} |A(x)| &\leq |\cos x|\,|\alpha - F(x)| + |\sin x|\,|\beta - G(x)| \\ &\leq |\alpha - F(x)| + |\beta - G(x)| \end{aligned} \tag{6}$$

D'autre part, d'après la question 3., $A'(x) = (F(x) - \alpha)\sin x + (G(x) - \beta)\cos x$ donc, comme précédemment,

$$\begin{aligned} |A'(x)| &\leq |\sin x|\,|F(x) - \alpha| + |\cos x|\,|G(x) - \beta)| \\ &\leq |F(x) - \alpha| + |G(x) - \beta| \end{aligned} \tag{7}$$

Mais d'après 1.a. et 1.b. nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \beta$ donc (6) et (7) prouvent que

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} A'(x) = 0.$$

5. a. $\forall x \in]0;1] \forall u \in [x;1] 0 \leq \dfrac{\cos u}{u} \leq \dfrac{1}{u}$ ($\cos u \geq 0$ car $]0;1] \subset [0;\frac{\Pi}{2}]$) donc
$0 \leq \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leq \int_x^1 \frac{1}{u}\,du$, c'est à dire $0 \leq \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leq -\ln x$

b. $\forall x \in]0;1] \sin x \geq 0$, on peut donc multiplier les trois membres de l'encadrement précédent par $\sin x$, Ce qui donne :

$$\boxed{0 \leq \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leq -\sin x \ln x} \tag{8}$$

On sait que $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x \ln(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$, (8) prouve alors que

$$\lim_{x\to0^+} \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du = 0$$

Or $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x = 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge et sa valeur est indépendante de x donc

$$\lim_{x\to0^+} \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0$$

par addition des limites : $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x \left[\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du\right] = 0$ et par la relation de Chasles :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0} \tag{9}$$

c. D'après 1.c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge ; d'autre part, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du$ converge puisque la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est prolongeable par continuité sur $[0;1]$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge ;
On a vu en 2.b.(relation (4)) que

$$A(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

à l'aide de (9) et puisque $\lim\limits_{x\to0^+} \cos x = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du} \tag{10}$$

II- 1. Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \mapsto t^k.e^{-xt}$ a pour limite 0 en $+\infty$. Il existe donc un réel A > 0 tel que $\forall t \geq A, 0 \leq t^k.e^{-xt} \leq 1$. D'autre part cette même fonction est continue sur l'intervalle fermé $[0;A]$, Elle est donc bornée sur $[0;A]$; étant bornée sur $[0;A]$ et majorée sur $[A,+\infty[$, elle est donc majorée sur $[0;+\infty[$ et donc bornée puisqu'elle est positive ;
Il existe donc un réel M (dépendant de k et x), tel que $\forall t \in [0;+\infty[$, $0 \leq t^k.e^{-xt} \leq M$. D'où

$$0 \leq \frac{t^k.e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{M}{1+t^2} \leq \frac{M}{t^2}$$

Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^k.e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur $[0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (intégrale de Riemann avec un coefficient > 1) Donc par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k.e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge et comme par continuité de la fonction a intégrer sur $[0;1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k.e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ existe , on en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^k.e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \text{ converge}} \tag{11}$$

et est notée $B_k(x)$

2. a. Soit u un réel ; La fonction exponentielle est de classe C^2 sur le segment I d'extrémités 0 et u, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|\exp(u) - \exp(0) - u\exp'(0)| \leq \max_{x\in I} |\exp"(x)| \frac{u^2}{2}$$

C'est à dire

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \max_{x\in I}(e^x)$$

Si $u \geq 0$ alors $\max_{x\in I}(e^x) = e^u (= e^{|u|})$ et si $u < 0$ alors $\max_{x\in I}(e^x) = 1 < e^{-u} (= e^{|u|})$. Finalement :

$$\boxed{|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}} \qquad (12)$$

b. Puisque toutes les intégrales convergent et par linéarité de l'intégration : Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, pour tout entier naturel k, pour tout réel h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \frac{t^k\left(e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right)}{1+t^2} dt\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_0^{+\infty} \frac{t^k\left(e^{-ht} - 1 + ht\right)e^{-xt}}{1+t^2} dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{1+t^2}\left|e^{-ht} - 1 + ht\right| e^{-xt}\, dt \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{1+t^2}\frac{(-ht)^2}{2} e^{|-ht|} e^{-xt}\, dt
\end{aligned}$$

(D'après (12) en remplaçant u par $-ht$). Mais $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$ donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| &\leq \frac{1}{2|h|}\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{1+t^2} h^2 t^2 e^{\frac{xt}{2}} e^{-xt}\, dt \\
&\leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2}}{1+t^2} e^{\frac{-xt}{2}}\, dt
\end{aligned}$$

C'est à dire finalement :

$$\boxed{\left|\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad (13)$$

c. Puisque $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, et que

$$0 \leq \left|\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$

On en déduit par le théorème d'encadrement des limites que

$$\lim_{h\to 0} \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x)$$

Ce qui, par définition, prouve que B_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $\boxed{B_k'(x) = -B_{k+1}(x)}$

d. Puisque ce résultat est vrai pour tout entier naturel k, il prouve que B_{k+1} est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$ donc B_k est de classe C^1 et en appliquant ce résultat à $k+1$, on peut dire que B_k est de classe C^2 ur $]0;+\infty[$ et que $B_k" = -B_{k+1}' = +B_{k+2}$.
En particulier pour $k = 0$, $B_0" = B_2$.
Or $B_2(x) + B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ donc, toutes les intégrales étant convergentes,

$$\begin{aligned}
B_0"(x) + B_0(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt \\
&= \lim_{X\to+\infty} \int_0^X e^{-xt}\, dt = \lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}e^{-xX} + \frac{1}{x}\right] \\
B_0"(x) + B_0(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

3. Pour tout x de $]0;+\infty[$, pour tout t de $]0;+\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$ donc, pour tout réel a positif

$$0 \leq \int_0^a \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^a e^{-xt}\, dt$$

C'est à dire :

$$0 \leq \int_0^a \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{x} - \frac{e^{-ax}}{x}$$

On peut passer à la limite lorsque a tend vers $+\infty$ car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.
On obtient donc :

$$\boxed{0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x}} \qquad (14)$$

De même : Pour tout x de $]0;+\infty[$, pour tout t de $]0;+\infty[$, $0 \leq \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq te^{-xt}$ donc, pour tout réel a positif

$$0 \leq \int_0^a \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^a te^{-xt}\, dt$$

Or par une intégration par parties sans difficulté :

$$\int_0^a t\, e^{-x\,t}\, dt = -\frac{a\, e^{-x\, a}}{x} - \int_0^a -\frac{e^{-x\,t}}{x} dt = -\frac{a\, e^{-x\,a}}{x} - \frac{e^{(-x\,a)} - 1}{x^2}$$

Donc :

$$0 \leq \int_0^a \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} - \frac{ae^{-ax}}{x} - \frac{e^{-ax}}{x^2}$$

On peut passer à la limite lorsque a tend vers $+\infty$ car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.
On obtient donc $0 \leq B_1(x) \leq \frac{1}{x^2}$ donc

$$\boxed{0 \leq B_0'(x) \leq \frac{1}{x^2}} \qquad (15)$$

A l'aide du théorème d'encadrement des limites, (14) et (15) prouvent que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} B_0(x) = \lim_{x\to+\infty} B_0'(x) = 0} \qquad (16)$$

4. a. Pour tout x de $]0;+\infty[$, pour tout t de $[0;+\infty[$, $e^{-xt} \leq 1$, donc $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ donc, pour tout réel a positif

$$\int_0^a \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^a \frac{1}{1+t^2}\,dt \tag{17}$$

Or, en $+\infty$, $\dfrac{1}{1+t^2} \sim \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ étant convergente, on sait d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge aussi et que, par continuité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[0;1]$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge. Toutes les intégrales étant convergentes, on peut passer à la limite dans (17) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt \tag{18}$$

D'autre part, Pour tout x de $]0;+\infty[$, pour tout t de $[0;\dfrac{1}{\sqrt{x}}]$, $-xt \geq -\sqrt{x}$, donc $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}$ donc, d'après les propriétés de l'intégration, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}\,dt$, c'est à dire :

$$e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \tag{19}$$

Enfin, d'après la relation de Chasles, $B_0(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ donc par positivité, $B_0(x) \geq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$, (19) donne donc :

$$e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq B_0(x) \tag{20}$$

Pour terminer (18) et (20) donnent :

$$\boxed{e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt} \tag{21}$$

b. Effectuons le changement de variable $t \mapsto t = \tan u$ de classe C^1 dans la seconde intégrale : $dt = (1+\tan^2 u)du = (1+t^2)du$ donc

$$\int_{\tan 0}^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^y \frac{1}{1+t^2}(1+t^2)\,du = \int_0^y du \tag{22}$$

On a vu à la question précédente que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge et puisque $\displaystyle\lim_{y\to+\frac{\pi}{2}} \tan y = +\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{y\to+\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Dans (22) on peut faire tendre y vers $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}$.

c. Mais $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-\sqrt{x}} = \lim_{X\to 0} e^{-X} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ Le théorème d'encadrement des limites appliqué à l'encadrement du (19) prouve donc que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}} \tag{23}$$

III- 1. D'après I.3. et II.2.d., A et B_0 sont C^2 sur $]0;+\infty[$ donc ϕ est C^2 sur $]0;+\infty[$ et ϕ' est dérivable sur $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$; ainsi U est dérivable sur C^2 sur $]0;+\infty[$ et

$$\begin{aligned} U'(x) = 2\phi(x)\phi'(x) + 2\phi''(x)\phi'(x) &= 2\phi'(x)[\phi(x) + \phi''(x)] \\ &= 2\phi'(x)\{[(A(x) + A'(x)] - [B_0(x) + B_0'(x)]\} \\ &= 2\phi'(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0 \end{aligned}$$

Une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle, on en déduit que $\boxed{U \text{ est constante sur }]0;+\infty[}$

2. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a vu en I.4. et II.3. que A, A', B_0, B_0' ont pour limite 0, il en est donc de même pour ϕ et ϕ' et donc pour U. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0}$$

3. U étant constante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on déduit de III.2. que U est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \phi(x)^2 + \phi'(x)^2 = 0$$

Une somme de deux réels positifs ne peut être nulle que si ses termes sont tous nuls donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \phi(x) = 0$$

C'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, A(x) = B_0(x)}$$

4. B_0 a pour limite $\frac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers 0^+ d'après II.4.c, donc on déduit de la question précédente que A a pour limite $\frac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers 0^+, c'est à dire, d'après (10) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}}$$

Deuxième problème

I- Etude d'exemples

1. Un simple calcul donne $AU = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ dont les coefficients sont strictement positifs. Et puisque $U \geq 0$ et $AU > 0$ On en conclut que A est une matrice productive.

2. Soit $AU = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une matrice colonne positive, on a $BU - U = \begin{pmatrix} 4b+c \\ 2a+3c \\ 0 \end{pmatrix}$ qui n'est jamais strictement positif à cause de son troisième coefficient. Ainsi B n'est pas productive.

II- Caractérisation des matrices positives

1. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$et $X = (x_i)$ un matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et son $i^{\text{ième}}$ coefficient est $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} m_{ij}x_j$ qui est une somme de réels positifs donc MX n'a que des coefficients positifs donc $MX \geq 0$.

2. Réciproquement, si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MX \geq 0$. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$, et X l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$dont tous les coefficients sont nuls sauf un 1 à la $j^{\text{ième}}$ ligne), on a $MX = m_{ij}X \geq 0$ (le m_{ij} étant à la $i^{\text{ième}}$ ligne). Ainsi on a prouvé que pour tout i et tout j de $[\![1,n]\!]$, $m_{ij} \geq 0$, donc $X \geq 0$.

III- Caractérisation des matrices productives

1. a. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la $i^{\text{ième}}$ coefficient de $P - AP$ est strictement positif par hypothèse ; Donc $p_i - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{ij}p_j > 0$, donc $p_i > \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{ij}p_j$. Puisque A est productive, tous ses coefficients sont positifs et puisque P est > 0 le second membre de l'inégalité (stricte) précédente est positif ou nul. On en conclut que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $p_i > 0$. En conclusion $\boxed{\text{P>0}}$

   b. Par hypothèse, $\forall j \in [\![1,n]\!]$ on a $\dfrac{x_j}{p_j} \geq c$ donc $x_j \geq cp_j$ (car $p_j > 0$) donc $-cp_j \geq -x_j$. Ainsi $c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) = cp_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-cp_j) \geq cp_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$. C'est à dire :

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) \geq x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \tag{1}$$

   Or, par hypothèse $X \geq AX$, donc, en ne regardant que les $k^{\text{ièmes}}$ coefficients de ces deux colonnes, $x_k \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$, (1) implique donc :

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) \geq 0 \tag{2}$$

   Notons que $p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j$ est le $k^{\text{ième}}$ coefficient de $P - AP$ et est donc strictement positif par hypothèse. (2) prouve donc que $\boxed{c \geq 0}$.

   Par hypothèse, $\forall j \in [\![1,n]\!]$ on a $\dfrac{x_j}{p_j} \geq c$ mais tous les p_j sont strictement positifs et c est positif, on en conclut que tous les x_j sont positifs et donc $\boxed{X \geq 0}$.

   c. si $X = AX$, il est facile de voir que $-X = A(-X)$ et donc que $-X \geq A(-X)$, ce qui prouve, en utilisant II.1.b. appliqué à $-X$ que $-X \geq 0$ donc que $X \leq 0$. X étant à la fois positive et négative, ses coefficients sont aussi tous positifs et négatifs, donc ils sont tous nuls. Conclusion : $\boxed{X = 0}$. On vient donc de prouver l'implication :

$$(X = AX) \Longrightarrow (X = 0)$$

   qui s'écrit aussi

$$[(I_n - A)X = 0] \Longrightarrow [X = 0]$$

   Appelons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $I_n - A$, cela se traduit par $Ker(Id - f) \subset \{0\}$ donc $Ker(Id - f) = 0$; $(Id - f)$ est donc injectif, et puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini, on en déduit qu'il est bijectif. On peut alors conclure que $\boxed{I_n - A \text{ est inversible}}$.

   d. Par définition Y vérifie : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, $(I_n - A)Y = X \geq 0$ d'où $Y - AY \geq 0$ c'est à dire $Y \geq AY$ et d'après III.1.b. appliqué à Y, on peut conclure que Y est positive. On a donc prouvé que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, $(I_n - A)^{-1}X \geq 0$ ce qui implique d'après II.2. appliqué à $(I_n - A)^{-1}$ que $\boxed{(I_n - A)^{-1} \geq 0}$.

2. $V - BV = (I_n - B)V = U > 0$ car les coefficients de U sont tous égaux à 1.
Mais $(I_n - A)^{-1} \geq 0$ et $U > 0$ donc d'après I.1.,$(I_n - A)^{-1}U \geq 0$ donc $V \geq 0$.
B est positive et on a trouvé $V \geq 0$ tel que $V - BV > 0$;
Conclusion : $\boxed{B \text{ est productive}}$.

3. On a prouvé au III.1.d. que si une matrice A est productive alors

$$(I_n - A) \text{ est inversible et } (I_n - A)^{-1} \geq 0$$

Réciproquement, si une matrice $B \geq 0$ est telle que

$$(I_n - B) \text{ est inversible et } (I_n - B)^{-1} \geq 0$$

alors, on a vu au III.2. que B est productive.
Ainsi, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive :

$$\boxed{(A \text{ productive}) \Leftrightarrow ((I_n - A) \text{ est inversible et } (I_n - A)^{-1} \geq 0)}$$

4. $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + M - 2M^2 = I_n$. Donc $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M \geq 0$ car les coefficients de $I_n + 2M$ sont clairement positifs puisque ceux de M le sont. En résumé $M \geq 0$, $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} \geq 0$, on peut donc conclure d'après III.3. que

$$\boxed{M \text{ est productive}}.$$

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 3 mai 2004 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER EXERCICE

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{2\,e^t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$, comprenant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a. Établir, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$: $\quad 2\,e^t - t - t^2 > 0 \quad$ et $\quad 1 + t \geqslant \sqrt{1+t^2}$.

b. En déduire :

$$\forall t \in [0\,;+\infty[, \quad f(t) > t.$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

a. Établir que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^6$.

4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt.$$

a. Montrer que G est impaire.

b. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

d. Étudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}$, comprenant les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$.

DEUXIÈME EXERCICE

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $M_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R})\,;\ AM = M\}$$
$$E_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R})\,;\ A^2M = AM\}.$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2. a. Établir : $\ E_1(A) \subset E_2(A)$.

b. Montrer que, si A est inversible, alors $\ E_1(A) = E_2(A)$.

3. a. Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

b. *Un exemple* : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.

2. En déduire une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que $C = PDP^{-1}$.

3. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
Montrer : $\qquad M \in E_1(C) \Longleftrightarrow N \in E_1(D)$.

4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.

6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.
Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a : $0 < b < 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement « la i-ème boule tirée est blanche (respectivement rouge ; verte) ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de X.

2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad \mathrm{P}(X = k) = (1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}$.

3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0;1[\times]0;1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0;1[\times]0;1[, \quad f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}.$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in]0;1[\times]0;1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0;1[\times]0;1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.

3. Montrer que f admet en I un minimum local.

4 . a. Exprimer $\mathrm{E}(X)$ en fonction de $f(b,r)$.

b. Que peut-on dire de $\mathrm{E}(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$?

Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

On rappelle que $3^t = \mathrm{e}^{t \ln 3}$.

On note $\alpha = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty;2[\\ g(t) = \dfrac{1}{\alpha\, 3^t} & \text{si } t \in [2;+\infty[. \end{cases}$$

2. Vérifier que g est une densité de probabilité.

On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

3. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

a. Déterminer la loi de probabilité de Z.

b. Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.

- FIN -

Premier exercice

1. Variation de f

On étudie rapidement l'application f

$$t \mapsto f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Elle est définie, continue et dérivable pour tout réel t comme composition, quotient de fonctions de référence, définies, continues et dérivables.
Pour tout réel t, sa dérivée est :

$$f'(t) = \frac{2\left(t^2 - t + 1\right)e^t}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}$$

Comme chacun sait (ou devrait savoir), quel que soit le réel t, $t^2 - t + 1$ est strictement positif ; ce qui se vérifie immédiatement en calculant le discriminant ou en utilisant la forme canonique :

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

Il en résulte que $f'(t)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f y est strictement croissante. On notera que

$$f(t) \underset{|t|\to\infty}{\sim} \frac{2e^t}{|t|}$$

On a immédiatement $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

D'où le tableau de variation de la fonction f.

t	$-\infty$		$+\infty$
$f'(t)$		+	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.a Inégalités

Pour tout réel t positif, $1 + t^2 \leq 1 + 2t + t^2$; il en résulte que

$$\sqrt{1+t^2} \leq |1+t| = 1+t$$

Pour montrer la première inégalité, on peut étudier les variations de la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = 2e^t - t - t^2$$

En dérivant une première fois, on obtient :

$$\varphi'(t) = 2e^t - 1 - 2t$$

et en dérivant une seconde fois,

$$\varphi''(t) = 2e^t - 2$$

Pour tout réel positif t, $e^t \geq 1$; il en résulte que φ' est croissante sur $[0, +\infty[$; on a $\varphi'(0) = 1$ donc φ' est positive sur $[0, +\infty[$ et donc φ est croissante sur cet intervalle. On a $\varphi(0) = 2 > 0$ donc, pour tout réel positif t, $\varphi(t)$ est strictement positif, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad 2e^t - t - t^2 > 0$$

b. Conséquence

Réduisons $f(t) - t$; on a

$$f(t) - t = \frac{2e^t - t\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

De la question précédente, on déduit que pour tout réel positif t,

$$t\sqrt{1+t^2} \leq t(1+t)$$

donc

$$-t - t^2 \leq -t\sqrt{1+t^2} \qquad \text{et donc} \qquad 0 < 2e^t - t - t^2 \leq 2e^t - t\sqrt{1+t^2}$$

Il en résulte que $f(t) - t$ est strictement positif sur $[0, +\infty[$ et donc que $f(t) > t$.

3.a Suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Le premier terme de la suite est $u_0 = 1$; la fonction f est à valeur dans $]0, +\infty[$, on en déduit que $u_1 > 0$ et par une récurrence immédiate que u_n est strictement positif. Donc, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0, +\infty[$.
Supposons que (u_n) admette une limite λ finie ; la fonction f étant continue sur $[0, +\infty[$, elle le serait en λ et on aurait $f(\lambda) = \lambda$; mais dans la question précédente on a montré que pour tout réel positif t, $f(t) > t$; il en résulte que la suite ne peut admettre de limite finie.
Reste à montrer qu'elle admet une limite égale à $+\infty$. Il suffit pour cela de montrer que la suite est croissante.
On a

$$u_1 = \frac{2e}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e > 1 \qquad \text{donc} \qquad u_1 \geq u_0$$

Par récurrence, si pour un entier n quelconque fixé $u_{n+1} \geq u_n$, alors, par croissance de f

$$f\left(u_{n+1}\right) \geq f\left(u_n\right) \qquad \text{et donc} \qquad u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

Conclusion : pour tout entier nature n, $u_{n+1} \geq u_n$ et donc (u_n) est croissante.

De ce qui a été dit précédemment, on en déduit que (u_n) est divergente de limite $+\infty$.

b. Programme

La suite (u_n) étant croissante, la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \geq 10^6$ est aussi la plus petite valeur à partir de laquelle $u_n \geq 10^6$.
Sans finesse, je propose le petit programme suivant, testé sous le logiciel « Irie Pascal » téléchargeable sur Internet.

```
Program Lyon_2004_eco;
var
  n :integer;
  u: real;
Begin
        u:=1;
        n:=0;
        while u<1000000 do
                begin
                        u:=2*exp(u)/sqrt(1+u*u);
                        n:=n+1;
                end;
        writeln('la valeur de n est : ', n);
End.
```

La valeur obtenue est 3 ce qui est très vite vérifié sous n'importe quel logiciel de calcul.

4.a Parité de la fonction G.

La fonction f est continue sur $]-\infty, +\infty[$ donc elle est intégrable sur tout segment inclus dans $]-\infty, +\infty[$; ainsi, pour tout réel x, la fonction f est intégrable sur $[-x, x]$ ou $[x, -x]$ et G est définie sur $]-\infty, +\infty[$.
On a, pour tout x,

$$G(-x) = \int_x^{-x} f(t)\,dt = -\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = -G(x)$$

Par suite G est impaire

b. Dérivabilité et dérivée de G

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Désignons par F la primitive de f qui s'annule en 0. Pour tout réel x,

$$G(x) = F(x) - F(-x)$$

La fonction F est de classe C^1 comme primitive d'une fonction continue ; la fonction G est donc de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ comme composition et différence de fonctions de classe C^1. De plus, pour tout réel x,

$$G'(x) = f(x) + f(-x) = 2\frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

c. Limites de G

Soit x un réel positif ;

$$F(x) = \int_0^x \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \geq 0 \qquad \text{et} \qquad -F(-x) = \int_{-x}^0 \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \geq 0$$

Comme $G(x) = F(x) - F(-x)$ et que, pour tout réel x positif, $-F(-x) = F(x) \geq 0$, on en déduit que $G(x) \geq F(x)$; par ailleurs, d'après la question 2b),

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \geq \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

La fonction G étant une fonction impaire, on en déduit, $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty$. (Cette limite n'était pas demandé mais elle était nécessaire pour traiter la question suivante)

d. Tableau de variation de G.

On a dit ci-dessus que G est de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et que

$$G'(x) = 2\frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

Il s'ensuit que G est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$; on a donc le tableau suivant :

t	$-\infty$		$+\infty$
$G'(t)$		$+$	
G	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Deuxième exercice

Partie I

1. Espace vectoriel

Pour montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on peut par exemple, vérifier que l'application φ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans lui-même, défini par $\varphi(M) = (A - I)M$ est linéaire et que $E_1(A)$ en est le noyau.

Pour la linéarité de φ, on a tout de suite $\forall M_1,\ M_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\alpha M_1 + M_2) = (A-I)(\alpha M_1 + M_2) = \alpha(A-I)M_1 + (A-I)M_2$$

$$\varphi(\alpha M_1 + M_2) = \alpha\varphi(M_1) + \varphi(M_2)$$

Donc φ est linéaire et

$$Ker(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM - M = 0\} = E_1(A)$$

Donc $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.a Inclusion

Si M appartient à $E_1(A)$, alors $AM = M$ et donc, en multipliant par A à gauche, $A^2M = AM$; il s'ensuit que M est élément de $E_2(A)$; on a donc l'inclusion $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b. Egalité

Supposons que A soit inversible ; si M est un élément de $E_2(A)$, alors $A^2M = AM$; en multipliant à gauche par A^{-1} (qui existe), on obtient $AM = M$ et donc M est élément de $E_1(A)$.

Il en résulte que $E_2(A) \subset E_1(A)$ et de la question précédente, on en déduit que $E_1(A) = E_2(A)$.

3.a Cas où $A - I$ est inversible.

Rappelons que $E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ (A-I)M = 0\}$. Si $A - I$ est inversible alors, pour tout M élément de $E_1(A)$, $(A - I)M = 0$; en multipliant à gauche par $(A - I)^{-1}$ on obtient, $M = 0$; il en résulte que dans ce cas, $E_1(A)$ est inclus dans $\{0\}$, et comme on a l'inclusion inverse, on a l'égalité. Ainsi, on peut écrire,

$A - I$ inversible $\Rightarrow E_1(A) = \{0\}$

b. Exemple

On notera que la matrice B donnée est inversible car triangulaire sans 0 sur la diagonale ; donc, d'après la question 2b), $E_1(B) = E_2(B)$.

D'autre part,

$$B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est elle aussi inversible car triangulaire sans 0 sur la diagonale ; d'après la question précédente, $E_1(B) = \{0\}$. De cette étude on peut conclure que

$E_1(B) = E_2(B) = \{0\}$

Partie II

1. Valeurs propres et espaces propres

Le candidat moyen aura remarqué que dans la seconde question, il est dit que la matrice C est diagonalisable. Si de plus il est un peu astucieux, il se dira qu'il y a toutes les chances du monde pour que ses valeurs propres soient des nombres entiers pris dans l'ensemble $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$. Un coup d'œil rapide sur la matrice C et il remarque que la somme des trois colonnes de C est nulle ; il s'ensuit que 0 est valeur propre de C.

D'autre part, en écrivant

$$C - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

il remarque aussi que la somme des deux premières colonnes de cette matrice est nulle ; il s'ensuit que 1 est valeur propre de C.

D'autre part, en réduisant

$$C - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

il remarque que la somme de la première et de la dernière colonne est nulle ; il s'ensuit que 2 est aussi valeur propre de C.

On a ainsi vu que 0, 1 et 2 sont des valeurs propres de C ; comme C est une matrice d'ordre 3, elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres et donc l'ensemble des valeurs propres de C est $\{0, 1, 2\}$.

Bien sûr, la réduction de la matrice $C - \lambda I$ par la méthode de Gauss conduisait aussi à ce résultat et était tout à fait acceptable.

Pour déterminer les espaces propres E_0, E_1 et E_2 associés à chacune de ces valeurs propres, résolvons chacune des équations

$$CX = 0 \qquad (C - I)X = 0 \qquad \text{et} \qquad (C - 2I)X = 0$$

où X appartient à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La première équation est équivalente au système

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x \qquad\ \ - z = 0 \\ 2x - 2y \qquad = 0 \end{cases} \qquad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On permute la première et la seconde ligne puis on remplace les deux dernières lignes respectivement par $L_2 - 3L_1$ et par $L_3 - 2L_1$. D'où le système

$$\begin{cases} x \quad - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Et donc $x = y = z$. Ainsi E_0 est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par X_1 tel que

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La deuxième équation est équivalente au système

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - y \quad - z = 0 \\ 2x - 2y \quad - z = 0 \end{cases}$$

On remplace les deux dernières lignes respectivement par $L_2 - 2L_1$ et par $L_3 - L_1$. D'où le système

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Et donc $x = y$ et $z = 0$. Ainsi E_1 est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par X_2 tel que

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La troisième équation est équivalente au système

$$\begin{cases} x - 2y \quad - z = 0 \\ x - 2y \quad - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

On remplace les deux dernières lignes respectivement par $L_2 - L_1$ et par $L_3 - 2L_1$. D'où le système

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2y \quad = 0 \end{cases}$$

Et donc $x = z$ et $y = 0$. Ainsi E_2 est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par X_3 tel que

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. <u>Diagonalisation de C</u>
Posons P la matrice des vecteurs X_1, X_2, X_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les éléments de la première ligne de cette matrice n'a que des 1 ; montrons qu'elle est inversible. Pour ce faire, on va montrer que le système $PX = 0$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un système de Cramer, c'est-à-dire que le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y \quad = 0 \\ x \quad + z = 0 \end{cases}$$

n'admet qu'une solution. On remplace L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -z = 0 \\ -y \quad = 0 \end{cases}$$

On a donc qu'une seule solution $x = y = z = 0$. Donc la matrice P est inversible. Par suite, la matrice C vérifie $C = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. <u>Equivalence</u>
Soit M un élément de $E_1(C)$. On a $CM = M$; donc $PDP^{-1}M = M$; en multipliant par P^{-1} à gauche, on obtient $DP^{-1}M = P^{-1}M$, c'est-à-dire $DN = N$.
Réciproquement, si N est un élément de $E_1(D)$, alors $DN = N$, c'est-à-dire $DP^{-1}M = P^{-1}M$; en multipliant par P à gauche, on obtient $PDP^{-1}M = M$ et donc $CM = M$; ainsi M un élément de $E_1(C)$.

4. <u>Expression des matrices N</u>
Supposons que N soit un élément de $E_1(D)$ et posons

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

On a l'équivalence :

$$N \in E_1(D) \Leftrightarrow (D - I)N = 0$$

Soit,

$$N \in E_1(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = 0$$

et après calcul,

$$N \in E_1(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n_{11} & -n_{12} & -n_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Il s'ensuit que

$$N \in E_1(D) \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui achève la démonstration.

5. Expression des matrices M

On a démontré dans la question 3 que M appartient à $E_1(C)$ si, et seulement si, $P^{-1}M$ appartient à $E_1(D)$, c'est-à-dire s'il existe trois réels a, b et c tels que

$$P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille

$$F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

est donc génératrice de $E_1(C)$ et par ailleurs

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

équivaut à

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

et donc à $a = b = c = 0$; ainsi F est aussi une famille libre. Il en résulte que F est une base de $E_1(C)$ et que $E_1(C)$ est de dimension 3.

6. Expression des matrices de $E_2(C)$

Reprenons rapidement le raisonnement des questions 3, 4 et 5 ci-dessus. On a

$$M \in E_2(C) \Leftrightarrow C^2M = CM \Leftrightarrow PD^2P^{-1}M = PDP^{-1}M$$

$$M \in E_2(C) \Leftrightarrow D^2P^{-1}M = DP^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_2(D)$$

On a l'équivalence :

$$P^{-1}M \in E_2(D) \Leftrightarrow \left(D^2 - D\right)P^{-1}M = 0$$

C'est-à-dire, avec les mêmes notations que dans la question 4),

$$P^{-1}M \in E_2(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Et par suite,

$$P^{-1}M \in E_2(D) \iff \exists a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \,/\, P^{-1}M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$M \in E_2(C) \iff \exists a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \,/\, M = P\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$M \in E_2(C) \iff \exists a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \,/\, M = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

On a :

$$M = aI_1 + bI_2 + cI_3 + dI_4 + eI_5 + fI_6$$

où

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme dans la question précédente, la famille

$$F' = (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$$

engendre $E_2(C)$ et on montre comme précédemment que F' est une famille libre. Donc $E_2(C)$ est de dimension 6 et F' en est une base.
Les deux sous-espaces vectoriels $E_1(C)$ et $E_2(C)$ n'ont pas la même dimension ; ils sont donc distincts.

Troisième exercice

Partie I

1. Valeurs possibles de X.
   La variable X désigne un nombre de tirages ; il en résulte que l'ensemble de ses valeurs est inclus dans l'ensemble des entiers naturels ; il faut au moins deux tirages pour changer de couleur. Donc $X(\Omega) \subset \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Enfin, quel que soit l'entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe au moins un événement ω tel que $X(\omega) = n$, par exemple, $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, B_n$. Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

2. Loi de probabilité de X
   Pour tout entier naturel k appartenant à $X(\Omega)$,
   $$(X = k) = (B_1B_2 \cdots B_{k-1}\overline{B}_k) \cup (R_1R_2 \cdots R_{k-1}\overline{R}_k) \cup (V_1V_2 \cdots V_{k-1}\overline{V}_k)$$
   Donc
   $$p(X = k) = p\left[(B_1B_2 \cdots B_{k-1}\overline{B}_k) \cup (R_1R_2 \cdots R_{k-1}\overline{R}_k) \cup (V_1V_2 \cdots V_{k-1}\overline{V}_k)\right]$$
   Par incompatibilité,
   $$p(X = k) = p(B_1B_2 \cdots B_{k-1}\overline{B}_k) + p(R_1R_2 \cdots R_{k-1}\overline{R}_k) + p(V_1V_2 \cdots V_{k-1}\overline{V}_k)$$
   D'après la formule des probabilités composées :
   $$p(B_1B_2 \cdots B_{k-1}\overline{B}_k) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(B_2) \cdot \cdots \cdot p_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(\overline{B}_k) = b^{k-1}(1-b)$$
   En procédant de même pour les boules rouges et vertes, on obtient :
   $$p(X = k) = b^{k-1}(1-b) + r^{k-1}(1-r) + v^{k-1}(1-v)$$

3. Espérance de X
   Le cours sur les lois géométriques, nous enseigne que
   $$\forall x \in \,]0,1[\quad \sum_{n\geq 1} n(1-x)^{n-1}\, x = \frac{1}{x}$$
   Il s'ensuit que
   $$\forall x \in \,]0,1[\quad \sum_{n\geq 2} n(1-x)^{n-1}\, x = \frac{1}{x} - x$$
   Comme b, r et v sont des réels de l'intervalle $]0, 1[$, il en est de même des réels $1 - b$, $1 - r$ et $1 - v$; on en déduit donc que les séries
   $$\sum n(1-b)\, b^{n-1} \quad \sum n(1-r)\, r^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum n(1-v)\, v^{n-1}$$
   sont convergentes et
   $$\sum_{n\geq 2} n(1-b)\, b^{n-1} = \frac{1}{1-b} - (1-b) \qquad \sum_{n\geq 2} n(1-r)\, r^{n-1} = \frac{1}{1-r} - (1-r)$$
   $$\sum_{n\geq 2} n(1-v)\, v^{n-1} = \frac{1}{1-v} - (1-v)$$
   Donc la variable X admet une espérance et
   $$E(X) = \sum_{n\geq 2} n(1-b)\, b^{n-1} + \sum_{n\geq 2} n(1-r)\, r^{n-1} + \sum_{n\geq 2} n(1-v)\, v^{n-1}$$

$$E(X)=\frac{1}{1-b}-(1-b)+\frac{1}{1-r}-(1-r)+\frac{1}{1-v}-(1-v)$$

$$E(X)=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-v}-3+(b+r+v)$$

Et finalement

$$E(X)=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-v}-2$$

Partie II

1. Dérivées partielles

La fonction f est la somme de fonctions rationnelles définies sur]0, 1[x]0, 1[donc de classe C^1 sur]0, 1[x]0, 1[et on a, pour tout couple (x, y) de cet ensemble,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$$

2. Extremum local possible

L'ensemble]0, 1[x]0, 1[est ouvert et f est une fonction de classe C^1 sur cet ensemble ; il s'ensuit qu'il faut que f ait un point critique pour admettre un extremum local.
On résout donc dans]0, 1[x]0, 1[le système

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}=0\\[2mm]\dfrac{1}{(1-y)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}=0\end{cases}$$

Ce système implique par différence :

$$\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-y)^2}=0$$

C'est à dire

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-y)^2}$$

et donc :

$$|1-x|=|1-y|$$

Comme $1-x$ et $1-y$ sont positifs on en déduit que $x=y$. En reportant dans le système, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{4x^2}$$

On inverse, on prend les racines carrées

$$2|x|=|1-x|$$

et donc, pour $0<x<1$, $2x=1-x$. Par suite, le système est vérifié si, et seulement si,

$$x=y=\frac{1}{3}$$

La fonction f a donc un point critique sur]0, 1[x]0, 1[, le point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Par théorème, si f admet un extremum sur cet ensemble, ça ne peut être qu'au point $I=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

3. Minimum local de f.

La fonction f est de classe C^2 sur l'ensemble ouvert]0, 1[x]0, 1[et admet un point critique sur cet ensemble. Déterminons les dérivées partielles d'ordre 2 en ce point I :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{2}{(x+y)^3} \qquad r=\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}+\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{27}{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=\frac{2}{(x+y)^3} \qquad s=\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{27}{4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=\frac{2}{(1-y)^3}+\frac{2}{(x+y)^3} \qquad t=\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}+\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{27}{2}$$

On a :

$$\left.\begin{aligned}&rt-s^2=\left(\frac{27}{2}\right)^2-\left(\frac{27}{4}\right)^2>0\\&r>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\text{ est un minimum local de } f$$

4.a Expression de $E(X)$ en fonction de $f(b, r)$.

On a $1-v=r+b$; donc

$$E(X)=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{r+b}-2$$

Comme (b, r) appartient à]0, 1[x]0, 1[, on peut écrire $E(X)=f(b,r)-2$.

b. Cas où $b = r = v$ = $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Dans ce cas f admet localement un minimum au point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$; donc $E(X)$ admet aussi un minimum local, comprendre que le changement de couleur s'effectuera le lus tôt, en moyenne, lorsque la proportion de boules blanches, rouges et vertes est la même.

Partie III

1. Convergence et valeur de l'intégrale

Il peut paraître inutilement lourd de ne pas traiter les deux questions ensemble, mais il convient d'être prudent ; le correcteur peut ne pas voir que la convergence a bien été traitée. Je suggère donc la rédaction suivante :

La fonction définie sur [2, +∞[par $f(t)=e^{-t\ln 3}$ est continue comme composition de fonctions continues et est donc intégrable sur tout segment inclus dans [2, +∞[; ainsi, quel que soit $x \geq 2$,

$$H(x)=\int_2^x e^{-t\ln 3}dt \quad \text{existe et} \quad H(x)=-\frac{1}{\ln 3}\left[e^{-t\ln 3}\right]_2^x=\frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}-\frac{e^{-x\ln 3}}{\ln 3}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x\ln 3}}{\ln 3}=0$$

Donc

$$\int_2^{+\infty} e^{-t\ln 3}dt \quad \underline{\text{converge}} \text{ et } \quad \int_2^{+\infty} e^{-t\ln 3}dt=\frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}=\frac{1}{9\ln 3}$$

2. Densité de probabilité

La fonction g est continue sur]-∞, 2[comme fonction constante et sur [2, +∞[comme composition de la fonction exponentielle avec une fonction linéaire. Donc elle admet au plus 2 comme point de discontinuité.

Il est clair que la fonction g est positive sur]-∞, +∞[et, d'après la question précédente, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt \quad \text{converge et} \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha}e^{-t\ln 3}dt=\frac{1}{\alpha}\alpha=1$$

Donc g est une densité de probabilité

3. Espérance de Y

La fonction $t \mapsto te^{-t\ln 3}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc pour tout réel x supérieur ou égal à 2,

$$E_x(Y) = \int_2^x te^{-t\ln 3}dt$$

existe et, à l'aide d'une intégration par parties, en posant

$$u(t) = -\frac{1}{\ln 3}e^{-t\ln 3} \qquad u'(t) = e^{-t\ln 3}$$

$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

et en notant que les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[2, +\infty[$ donc sur tout segment inclus dans $[2, +\infty[$,

$$E_x(Y) = -\frac{1}{\ln 3}\left[te^{-t\ln 3}\right]_2^x + \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3}dt$$

et après calcul :

$$E_x(Y) = -\frac{1}{\ln 3}xe^{-x\ln 3} + \frac{2}{\ln 3}e^{-2\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}e^{-x\ln 3} + \frac{1}{(\ln 3)^2}e^{-2\ln 3}$$

Il s'ensuit que l'espérance de Y existe et , par croissance comparée, que

$$E(Y) = \lim_{x\to+\infty} \alpha E_x(Y) = (9\ln 3)\frac{2\ln 3+1}{(\ln 3)^2} = \frac{2\ln 3+1}{\ln 3}$$

4.a Loi de probabilité de Z

Pour tout entier relatif n,

$$p(Z = n) = p(n \le Y < n+1) = \int_n^{n+1} g(t)\,dt$$

$$p(Z = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 2 \\ \frac{1}{\alpha}\left(H(n+1) - H(n)\right) & \text{si } n \ge 2 \end{cases}$$

$$p(Z = n) = \begin{cases} 0 & \text{si} n < 2 \\ \frac{\ln 3}{e^{-2\ln 3}} \cdot \frac{e^{-n\ln 3} - e^{-(n+1)\ln 3}}{\ln 3} & \text{si } n \ge 2 \end{cases}$$

et finalement

$$p(Z = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 2 \\ \frac{e^{-n\ln 3} - e^{-(n+1)\ln 3}}{e^{-2\ln 3}} & \text{si } n \ge 2 \end{cases}$$

Il en résulte que $Z(\Omega) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et que pour tout élément n de $Z(\Omega)$, on a

$$p(Z = n) = \frac{e^{-n\ln 3} - e^{-(n+1)\ln 3}}{e^{-2\ln 3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$p(Z = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

b. Comparaison des lois de X et de Z

Pour $b = r = v = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et pour tout élément de $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$p(X = n) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = p(Z = n)$$

Les deux variables X et Z ont la même loi de probabilité.