Mathématiques
Voies S et E

# Corrigés des épreuves Maths II HEC 2004 voies S et E

**Roger Cuculière**
***Professeur de mathématiques en classes préparatoires, lycée Pasteur (Neuilly sur Seine).***

## Voie scientifique

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

**BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL**

**Concepteurs :**
**H.E.C.**
**E.S.C.P. – E.A.P.**

OPTION SCIENTIFIQUE

**MATHEMATIQUES II**

Lundi 10 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de *stabilité*, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

• Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires est une *suite de copies* de $X$ si $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables *indépendantes* ayant toutes *même loi* que $X$.

• On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi *stable* si il existe une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour toute suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de copies de $X$ et pour tout entier $n$ supérieur ou égal 1, $X_1 + \ldots + X_n$ et $a_n X$ ont même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ si $X$ n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est la *suite associée* à la loi de $X$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 (*i.e.* $\{1, 2, 3, \ldots\}$).

On admettra que

$$\forall A > 0, \quad \arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$$

où l'expression arctan désigne la *fonction réciproque* de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

### I. Un résultat sur certaines suites positives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels *strictement positifs* vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $u_{mn} = u_m u_n$,
- il existe un réel strictement positif $A$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $m \leq n$, alors $u_m \leqslant A u_n$.

On veut montrer qu'il existe un réel positif $\alpha$ tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha$.

**1)** Montrer que $u_1 = 1$.

**2)** Montrer que, pour tout couple $(r, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k$.

**3)** Soit $r \in \mathbb{N}^*, r \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha_r$ tel que, pour tout entier $n$ de la forme $r^k$, où $k$ est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$. Exprimer $\alpha_r$ en fonction de $r$ et de $u_r$.

**4)** Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, $r_2 > r_1 \geqslant 2$. On introduit alors les réels $\alpha_{r_1}$ et $\alpha_{r_2}$ définis selon la question précédente.

**a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier $\ell$ tel que $r_2^k \leqslant r_1^\ell < r_2^{k+1}$.

**b)** En déduire que $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leqslant A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$ et $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leqslant A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.

**c)** En faisant tendre $k$ vers l'infini, déduire l'égalité $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$. Conclure.

## II. La loi gaussienne

**A.** On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$ :

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}).$$

**1)** Soit $a$ un réel *strictement positif* et $b$ et $c$ deux réels quelconques.

Trouver trois réels $\alpha, m, \sigma$, que l'on exprimera en fonction de $a, b, c$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

**2)** En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(ax^2+bx+c)\big)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\big(\frac{b^2-4ac}{4a}\big)$.

**3)** Soient $G$ et $G'$ deux variables aléatoires gaussiennes *centrées indépendantes* de variances respectives $\sigma^2$ et $\sigma'^2$. **Redémontrer** en calculant la densité de la loi de $G+G'$, que $G+G'$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

**4)** Montrer que $G$ suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de $G$ ?

**B.** Dans cette section, $X$ est une variable aléatoire qui suit une loi *stable* et qui admet une espérance $m$ et une variance $\sigma^2$ *strictement positive. On ne suppose pas que $X$ suit une loi gaussienne.* Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de $X$ et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de $X$.

**1)** En considérant les variances de $X_1 + \ldots + X_n$ et de $a_n X$, donner, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $a_n$. Montrer que $m = 0$.

**2)** En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que $X$ suit une loi gaussienne.

## III. La loi de Cauchy

**1)** Soit $a > 0$. Vérifier que la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ est bien une densité de probabilité. (On utilisera le changement de variable $x = a\tan t$).

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre $a$ si elle admet la fonction $f_a$ pour densité.

**2)** Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre *égal à* 1.

**a)** La variable $Z$ admet-elle une espérance ?

**b)** Soit $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $\lambda Z$ ?

**3)** Soit $P$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 à *coefficients réels.* Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes *distincts* de partie imaginaire *strictement positive.* Montrer que si $z_1$ et $z_2$ sont des racines de $P$, alors $P = 0$. (On remarquera que $\overline{z}_1$ et $\overline{z}_2$ sont également racines de $P$.)

**4)** Soient $a, a' > 0$, et $y \in \mathbb{R}^*$. Soient $u, u', v, v'$ quatre réels tels que

$$u + iv = \frac{a'}{\pi((y-ia)^2 + a'^2)} \qquad \text{et} \qquad u' + iv' = \frac{a}{\pi((y+ia')^2+a^2)}$$

où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

**a)** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{aa'}{\pi^2(x^2+a^2)((x-y)^2+a'^2)} = \frac{vx+au}{\pi(x^2+a^2)} + \frac{v'(x-y)+a'u'}{\pi((x-y)^2+a'^2)} \quad (\star)$$

(On multipliera les deux membres de $(\star)$ par leur dénominateur commun et on appliquera la question précédente en prenant $z_1 = ia$ et $z_2 = y + ia'$.)

**b)** **On admet** les égalités suivantes :

$$u + iv = \frac{a'(y^2 + a'^2 - a^2) + 2iaa'y}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)}$$
$$u' + iv' = \frac{a(y^2 + a^2 - a'^2) - 2iaa'y}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)}$$

Montrer que :

$$u + u' = \frac{a+a'}{\pi(y^2+(a+a')^2)}.$$

**5)** Soit $B > 0$. Calculer $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x}{x^2+a^2}dx$ et $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x-y}{(x-y)^2+a^2}dx$.

**6)** Soient $Z_a$ et $Z_{a'}$ deux variables aléatoires *indépendantes* suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs $a$ et $a'$. Montrer que la valeur de la densité de la loi de $Z_a + Z_{a'}$ au point $y$ est égale à $u + u'$ (cf. question **4**). En déduire la loi de $Z_a + Z_{a'}$.

**7)** En déduire que $Z$ suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de $Z$ ?

## IV. Les événements exceptionnels

Du fait de la décroissance rapide à l'infini de la fonction densité des variables gaussiennes, celles-ci n'accordent que peu d'importance aux valeurs extrêmes. Aussi, pour inclure, dans un modèle mathématique, l'éventualité de phénomènes extrêmes, on est amené à privilégier des lois dont la fonction densité décroît moins vite à l'infini. Le but de cette partie est d'étudier ce qu'il en est pour la loi de Cauchy.

Dans cette partie, $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires *indépendantes* suivant la loi de Cauchy de *paramètre* 1.

On dira qu'un événement exceptionnel s'est produit avant l'instant $n$, si il existe un entier $k$ inférieur ou égal à $n$ tel que, pour tout entier $i$ inférieur ou égal à $n$ et *différent* de $k$, $|X_k| > 2|X_i|$. Autrement dit, à l'instant $n$, la variable la plus forte de l'histoire (en valeur absolue) est supérieure au double de chacune des autres variables. On appellera $E_n$ un tel événement. Ainsi,

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Big( \bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} (|X_k| > 2|X_i|) \Big)$$

**1)** Montrer que :

$$P(E_n) = nP\Big(\bigcap_{i=2}^{n} (|X_1| > 2|X_i|)\Big).$$

**2)** En déduire que :

$$\forall A > 0, \quad P(E_n) \geqslant nP\Big((|X_1| > 2A) \cap \big(\bigcap_{i=2}^{n}(|X_i| < A)\big)\Big).$$

**3)** Montrer que : $\forall A > 0$, $P(|X_1| > A) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{A}$.

**4)** Soit $\lambda > 0$, et $n$ assez grand pour que $\dfrac{\pi\lambda}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$. En choisissant $A = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}$, montrer que

$$P(E_n) \geqslant nP\Big(|X_1| > \frac{2}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}\Big)(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-1}.$$

**5)** Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout entier $n$ assez grand, $P(E_n) > \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda} - \varepsilon$.

**6)** En déduire que, pour tout entier $n$ assez grand, $P(E_n) > \dfrac{1}{6}$.

### V. Le nombre $a_n$ est une puissance de $n$

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi *stable*. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de $X$ et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de $X$.

**A.** Une variable aléatoire $X$ est dite *symétrique* si elle a la même loi que la variable $-X$. Autrement dit, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $P(X \in I) = P(-X \in I)$ (exemple : une variable gaussienne centrée).

Dans cette section, on suppose $X$ *non nulle et symétrique*.

**1)** Montrer que $P(X > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 0))$.

**2)** Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $P(X > \mu) > 0$.

**3) a)** Montrer que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $a_{m+n}X$ a même loi que $a_m X_1 + a_n X_2$.

**b)** En déduire que, pour tout $k$-uplet d'entiers $(m_1, ..., m_k)$, $a_{m_1+...+m_k}X$ a même loi que $a_{m_1}X_1 + ... + a_{m_k}X_k$.

**c)** En prenant tous les entiers $m_i$ égaux à un même entier $\ell$, montrer que $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

**4)** En considérant l'événement $(X_1 \geqslant 0)\cap(X_2 > t)$, montrer en utilisant la question V.A.3.a, que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, et pour tout $t > 0$,

$$P(X > \frac{a_n}{a_{m+n}}t) \geqslant \frac{1}{2}P(X > t).$$

**5)** En utilisant la question V.A.2., montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+m}} : (m,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}\right\}$ est majoré. En déduire l'existence d'un réel $\alpha$ tel que, pour tout entier naturel non nul $n$, $a_n = n^\alpha$.

**B.** On suppose que $X$ suit une loi stable à densité, mais on ne suppose plus que $X$ est symétrique.

**1)** Montrer que la variable $X_1 - X_2$ est symétrique.

**2)** Montrer que $X_1 - X_2$ suit une loi stable. Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de $X_1 - X_2$. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_n = b_n$. Conclure.

## Partie I : un résultat sur certaines suites positives

**I. 1)** • En faisant $m := 1$ et $n := 1$ dans l'égalité : $u_{mn} = u_m u_n$, il vient : $u_1 = (u_1)^2$, et puisque $u_1 > 0$, on en déduit : $u_1 = 1$.

**I. 2)** • Soit $r \in \mathbb{N}^*$. L'égalité : $u_{r^k} = (u_r)^k$ est évidemment vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons-la vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. En faisant : $m := r^k$ et $n := r$ dans l'égalité : $u_{mn} = u_m u_n$, il vient : $u_{r^{k+1}} = u_{r^k} u_r = (u_r)^k u_r = (u_r)^{k+1}$. Ceci prouve, par récurrence sur $k$, que l'on a : $u_{r^k} = (u_r)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**I. 3)** • Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geq 2$, et $m = r^k = e^{k\ln r}$, $k \in \mathbb{N}$. On a : $u_n = u_{r^k} = (u_r)^k = e^{k\ln u_r} = e^{k\ln r\frac{\ln u_r}{\ln r}} = n^{\frac{\ln u_r}{\ln r}}$, qui est bien de la forme : $n^{\alpha_r}$, avec : $\alpha_r = \dfrac{\ln u_r}{\ln r}$.

**I. 4) a)** • On a : $\ln r_2 > \ln r_1 > 0$ d'où : $\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1} > 1$. L'égalité à prouver : $r_2^k \leq r_1^\ell < r_2^{k+1}$, s'écrit : $k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1} \leq \ell < (k+1)\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$.

Soit $q = E(k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1})$ (partie entière). On a : $q \in \mathbb{N}^*$ (car $k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1} > 1$), et : $q \leq k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1} < q + 1$. Les inégalités : $q \leq k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$ et : $1 < \dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$ impliquent : $q + 1 < (k+1)\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$, et il vient donc : $k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1} < q + 1 < (k+1)\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$. L'entier $\ell$ cherché existe bien, car l'entier $\ell = q + 1$ convient.

**I. 4) b)** • Il en résulte : $u_{r_2^k} \leq A u_{r_1^\ell}$, soit d'après I. 3 : $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leq A(r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq A(r_1^{k+1})^{\alpha_{r_1}} \leq A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$, et de plus : $u_{r_1^\ell} \leq A u_{r_2^{k+1}}$, soit : $(r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$. L'inégalité : $r_2^k \leq r_1^\ell$ implique : $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq (r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}}$, d'où finalement : $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.

**I. 4) c)** • Les deux inégalités trouvées en I. 4. b s'écrivent : $(r_2)^{k(\alpha_{r_2}-\alpha_{r_1})} \leq A(r_2)^{\alpha_{r_1}}$, et : $(r_2)^{k(\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2})} \leq A(r_2)^{\alpha_{r_2}}$.

Si $\alpha_{r_2} > \alpha_{r_1}$, alors : $\lim\limits_{k\to+\infty}(r_2)^{k(\alpha_{r_2}-\alpha_{r_1})} = +\infty$, et si $\alpha_{r_2} < \alpha_{r_1}$, alors : $\lim\limits_{k\to+\infty}(r_2)^{k(\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2})} = +\infty$. Ces deux conclusions sont contredites par les deux majorations précédentes, donc impossibles. Ne reste que : $\alpha_{r_2} = \alpha_{r_1}$.

• Ceci prouve que le réel $\alpha_r$ est en fait indépendant de $r$. Soit $\alpha$ ce réel. On a ainsi démontré qu'il existe un réel $\alpha$ tel que, quels que soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, si $n = r^k$, alors : $u_n = n^\alpha$. Or, tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ est de la forme $n = r^k$, avec $r = n$ et $k = 1$. Il en résulte : $u_n = n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

## Partie II : La loi gaussienne

**II. A. 1)** • La célèbre Forme Canonique du Trinôme nous donne immédiatement :

$ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, qui est bien de la forme : $\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2+\alpha$, avec :

$\sigma=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, $m=-\dfrac{b}{2a}$, $\alpha=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

**II. A. 2)** • On sait qu'une variable aléatoire $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ a pour densité :

$f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$, d'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}dx=\sigma\sqrt{2\pi}$. En conséquence :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}e^{-\alpha}dx=e^{-\alpha}\sigma\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{2\pi}\exp\frac{b^2-4ac}{4a}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\frac{b^2-4ac}{4a}$.

**II. A. 3)** • Soient $G$ et $G'$ deux variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes de variances respectives $\sigma^2$ et $\sigma'^2$. La variable aléatoire $G+G'$ admet pour densité :

$\displaystyle f_{G+G'}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_G(t)f_{G'}(x-t)dt=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma'}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/(2\sigma^2)}e^{-(x-t)^2/2\sigma'^2}dt$, et cette intégrale est de la forme :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(at^2+bt+c)}dt$, avec : $at^2+bt+c=\dfrac{1}{2\sigma^2}t^2+\dfrac{1}{2\sigma'^2}(x-t)^2=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{\sigma'^2})t^2-\dfrac{x}{\sigma'^2}t+\dfrac{x^2}{2\sigma'^2}$.

D'où : $a=\dfrac{\sigma^2+\sigma'^2}{2\sigma^2\sigma'^2}$, et : $b^2-4ac=\dfrac{x^2}{\sigma'^4}-\dfrac{\sigma^2+\sigma'^2}{\sigma^2\sigma'^2}.\dfrac{x^2}{\sigma'^2}=\dfrac{-x^2}{\sigma^2\sigma'^2}$, et alors, d'après II. A. 2 :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(at^2+bt+c)}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\frac{b^2-4ac}{4a}=\sigma\sigma'\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma^2+\sigma'^2}}\exp\frac{-x^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}$, d'où :

$f_{G+G'}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\sigma'^2)}}\exp\dfrac{-x^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}=\dfrac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\dfrac{-x^2}{2s^2}$, avec : $s=\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}$.

La variable aléatoire $G+G'$ est donc gaussienne, son espérance est nulle et sa variance est : $s^2=\sigma^2+\sigma'^2$.
On vérifie que : $E(G+G')=E(G)+E(G')$, et : $V(G+G')=V(G)+V(G')$.

**II. A. 4)** • Soit $G$ une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance $\sigma^2$, et soit $(G_k)_{k\geq 1}$ une suite de copies de $G$. D'après II. A. 3, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $G_1+...+G_n$ est gaussienne centrée, de variance $n\sigma^2$. En conséquence : $V(G_1+...+G_n)=n\sigma^2=nV(G)=V(G\sqrt{n})$, ce qui prouve que les variables aléatoires $G_1+...+G_n$ et $G\sqrt{n}$ ont même loi. Il s'ensuit que $G$ suit une loi stable, avec pour suite associée : $a_n=\sqrt{n}$.

---

**II. B. 1)** • Les variables aléatoires $X_1,...,X_n$ étant indépendantes et de même loi que $X$, on a :
$V(X_1+...+X_n)=V(X_1)+...+V(X_n)=nV(X)$.

Par ailleurs, $V(X_1+...+X_n)=V(a_nX)=a_n^2V(X)$, et comme $V(X)>0$, on en déduit : $a_n^2=n$, soit : $a_n=\sqrt{n}$.

• De plus, on a : $E(X_1+...+X_n)=E(X_1)+...+E(X_n)=nE(X)$, et par ailleurs :

$E(X_1+...+X_n)=E(a_nX)=a_nE(X)=\sqrt{n}\,E(X)$. Il en résulte : $(n-\sqrt{n})E(X)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et en particulier pour $n=2$, et comme $2-\sqrt{2}\neq 0$, force est d'en conclure : $m=E(X)=0$.

**II. B. 2)** • Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire : $Y_n=\dfrac{X_1+...+X_n}{n}$ suit la même loi que $\dfrac{a_nX}{n}=\dfrac{X}{\sqrt{n}}$.

Et la variable aléatoire : $Z_n=\dfrac{Y_n-m}{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$ suit donc la même loi que : $\dfrac{X}{\sqrt{n}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{X}{\sigma}$.

• La suite de copies $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et de même loi. Le théorème de la limite centrée dit que la suite $Z_n$ suit la loi normale centrée réduite. La variable aléatoire $\dfrac{X}{\sigma}$ suit donc la loi normale centrée réduite, ce qui signifie que $X$ suit une loi gaussienne d'espérance nulle et de variance $\sigma^2$.

## Partie III : La loi de Cauchy

**III. 1)** • Pour $a>0$, la fonction : $f_a(x)=\dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

• Soit $A>0$ ; dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}dx$, procédons au changement de variable : $x=a\tan t$,

$dx=a(1+\tan^2 t)dt$. Il vient : $\displaystyle\int_0^A\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}dx=\int_0^{\mathrm{Arctan}\,A}\frac{a}{\pi(a^2\tan^2 t+a^2)}a(1+\tan^2 t)dt=\int_0^{\mathrm{Arctan}\,A}\frac{1}{\pi}dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\,A$.

Or : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\mathrm{Arctan}\,A=\frac{\pi}{2}$, d'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}dx=\frac{1}{2}$. Le changement de variable : $y=-x$ conduit à : $\displaystyle\int_0^{-\infty}\frac{a}{\pi(y^2+a^2)}dy=-\frac{1}{2}$, d'où il suit que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}dx=1$, et la fonction : $f_a(x)=\dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ est bien une densité de probabilité.

**III. 2) a)** • Soit $A>0$ ; on a : $\displaystyle\int_{-A}^{A}|x|f_1(x)dx=\int_{-A}^{A}\frac{|x|dx}{\pi(x^2+1)}=2\int_0^A\frac{xdx}{\pi(x^2+1)}=\frac{1}{\pi}\int_0^A\frac{2xdx}{x^2+1}$

$=\dfrac{1}{\pi}[\ln(x^2+1)]_{x=0}^{x=A}=\dfrac{1}{\pi}\ln(A^2+1)$, qui tend vers $+\infty$ quand $A\to+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_1(x)dx$ est divergente, et la variable aléatoire $Z$ n'a donc pas d'espérance.

**III. 2) b)** • Si $\lambda>0$, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\displaystyle P(\lambda Z\leq x)=P(Z\leq\frac{x}{\lambda})=\int_{-\infty}^{x/\lambda}f_1(t)dt=\int_{-\infty}^{x/\lambda}\frac{dt}{\pi(t^2+1)}$.

Le changement de variable : $u=\lambda t$ dans cette intégrale conduit à :

$\displaystyle P(\lambda Z\leq x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi((\frac{u}{\lambda})^2+1)}.\frac{du}{\lambda}=\int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda du}{\pi(u^2+\lambda^2)}=\int_{-\infty}^{x}f_\lambda(u)du$.

La variable aléatoire $\lambda Z$ suit la loi de Cauchy de paramètre $\lambda$.

**III. 3)** • Soit $P$ un polynôme à coefficients réels admettant comme racines deux nombres complexes distincts $z_1$ et $z_2$, de parties réelles strictement positives. Puisque ce polynôme est à coefficients réels, il admet aussi pour racines $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$. Comme $z_1\neq z_2$, on a aussi : $\bar{z}_1\neq\bar{z}_2$. Les complexes $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ sont de parties réelles strictement négatives, et ne peuvent donc être égaux à $z_1$ ni à $z_2$, et il s'ensuit que : $z_1$, $z_2$, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ sont quatre racines complexes du polynôme $P$, toutes distinctes.
• Si de plus $P$ est de degré inférieur ou égal à 3, comme il a 4 racines complexes distinctes, c'est nécessairement le polynôme nul : $P=0$.

**III. 4) a)** • L'égalité proposée équivaut à :

$(vx+au)((x-y)^2+a'^2)+(v'(x-y)-a'u')(x^2+a^2)-\dfrac{aa'}{\pi}=0$ : à démontrer…

• Posons : $P(x)=(vx+au)((x-y)^2+a'^2)+(v'(x-y)+a'u')(x^2+a^2)-\dfrac{aa'}{\pi}$, en prenant $x$ pour variable, et $a$, $a'$, $u$, $u'$, $v$, $v'$, $y$ pour paramètres. Posons : $z_1=ia$ et $z_2=y+ia'$. On voit que : $P(z_1)=P(z_2)=0$. Comme $y\neq 0$, on a : $z_1\neq z_2$, et le polynôme $P$ est un polynôme à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 qui admet deux racines complexes distinctes de partie imaginaire strictement positive. D'après III. 3, ce polynôme est nul, et c'est justement Ce Qu'il Fallait Démontrer.

**III. 4) b)** • Le réel $u+u'$ est la somme des parties réelles des complexes $u+iv$, et $u'+iv'$, soit :

$u+u'=\dfrac{a'(y^2+a'^2-a^2)+a(y^2+a^2-a'^2)}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)}$. Le numérateur de cette fraction est :

$a'(y^2+a'^2-a^2)+a(y^2+a^2-a'^2)=(a+a')y^2+a'(a'^2-a^2)-a(a'^2-a^2)$

$=(a+a')y^2+(a'-a)(a'^2-a^2)=(a+a')y^2+(a'-a)^2(a'+a)=(a+a')(y^2+(a-a')^2)$.

Par suite : $u+u'=\dfrac{(a+a')(y^2+(a-a')^2)}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)}=\dfrac{a+a'}{\pi(y^2+(a+a')^2)}$.

**III. 5)** • Comme à la question III. 2. a, il est clair que, pour $B>0$ : $\int_{-B}^{B}\dfrac{xdx}{x^2+a^2}=[\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)]_{x=-B}^{x=B}=0$, et :

$$\int_{-B}^{B}\frac{(x-y)dx}{(x-y)^2+a^2}=[\frac{1}{2}\ln((x-y)^2+a^2)]_{x=-B}^{x=B}=\frac{1}{2}\ln((B-y)^2+a^2)-\frac{1}{2}\ln((B+y)^2+a^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{(B-y)^2+a^2}{(B+y)^2+a^2}.$$

**III. 6)** • La valeur de la densité de $Z_a+Z_{a'}$ en un point $y\in\mathbb{R}^*$ est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_a(x)f_{a'}(y-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}.\frac{a'}{\pi((y-x)^2+a'^2)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{aa'dx}{\pi^2(x^2+a^2)((x-y)^2+a'^2)}.$$

• D'après III. 4. a, on a, pour $B>0$ :

$$\int_{-B}^{B}\frac{aa'\,dx}{\pi^2(x^2+a^2)((y-x)^2+a'^2)}=\frac{v}{\pi}\int_{-B}^{B}\frac{x\,dx}{x^2+a^2}+u\int_{-B}^{B}\frac{a\,dx}{\pi(x^2+a^2)}+\frac{v'}{\pi}\int_{-B}^{B}\frac{(x-y)\,dx}{(x-y)^2+a'^2}+u'\int_{-B}^{B}\frac{a'\,dx}{\pi((x-y)^2+a'^2)}.$$

D'après III. 5, la première et la troisième de ces quatre intégrales tendent vers 0 quand $B\to+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\dfrac{adx}{\pi(x^2+a^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_a(x)dx=1$, car $f_a$ est une densité de probabilité (III. 1), et de même :

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{a'dx}{\pi((x-y)^2+a'^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a'dx}{\pi((x-y)^2+a'^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a'dt}{\pi(t^2+a'^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{a'}(t)dt=1,$$

par le changement de variable : $t=x-y$.

• La valeur de la densité de $Z_a+Z_{a'}$ en un point $y\in\mathbb{R}^*$ est donc finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{aa'\,dx}{\pi^2(x^2+a^2)((y-x)^2+a'^2)}=\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{aa'\,dx}{\pi^2(x^2+a^2)((y-x)^2+a'^2)}=u+u'.$$

• D'après III. 4. b, on a : $u+u'=\dfrac{a+a'}{\pi(y^2+(a+a')^2)}=f_{a+a'}(y)$.

• La variable aléatoire $Z_a+Z_{a'}$ suit donc la loi de Cauchy de paramètre $a+a'$.

**III. 7)** • Même raisonnement qu'en II. A. 4 : soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre 1, et soit $(Z_k)_{k\geq1}$ une suite de copies de $Z$. D'après III. 6, par une récurrence immédiate, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $Z_1+...+Z_n$ suit la loi de Cauchy de paramètre $n$. Or, d'après III. 2. b, la variable aléatoire $nZ$ suit cette même loi de Cauchy de paramètre $n$. Ceci montre que les variables aléatoires $Z_1+...+Z_n$ et $nZ$ ont même loi, et donc que $Z$ suit une loi stable, avec pour suite associée : $a_n=n$.

# Partie IV : les événements exceptionnels

**IV. 1)** • Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{1,\dots,n\}$, posons : $E_{n,k}=\bigcap\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k}}(|X_k|>2|X_i|)$. Les variables aléatoires $X_i$ étant indépendantes et de même loi, les probabilités des événements $E_{n,1},\dots,E_{n,n}$ sont les mêmes. On a donc :

$P(E_{n,k})=P(E_{n,1})=P(\bigcap\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq 1}}(|X_1|>2|X_i|))=P(\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_1|>2|X_i|))$. De plus, les événements $E_{n,1},\dots,E_{n,n}$ sont deux à deux incompatibles, d'où : $P(E_n)=P(\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_{n,k})=\sum\limits_{k=1}^{n}P(E_{n,k})=nP(E_{n,1})=nP(\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_1|>2|X_i|))$.

**IV. 2)** • Si l'événement : $((|X_1|>2A)\cap\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_i|<A))$ est réalisé, alors pour $i\in\{2,\dots,n\}$, on a : $|X_1|>2A$ et $|X_i|<A$, d'où : $|X_1|>2|X_i|$ ; tous les événements : $(|X_1|>2|X_i|)$, $i=2,\dots,n$, sont donc alors réalisés. Ce qui prouve :

$((|X_1|>2A)\cap\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_i|<A))\subset\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_1|>2|X_i|)$, d'où : $P((|X_1|>2A)\cap\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_i|<A))\leq P(\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_1|>2|X_i|))$, et par suite :

$nP((|X_1|>2A)\cap\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_i|<A))\leq nP(\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_1|>2|X_i|))=P(E_n)$.

**IV. 3)** • Pour $A>0$, on a successivement : $P(|X_1|>A)=1-P(|X_1|\leq A)=1-P(-A\leq X_1\leq A)=1-\int_{-A}^{A}f_1(x)dx$

$$=1-\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\pi(x^2+1)}=1-\frac{1}{\pi}[\text{Arctan}\,x]_{x=-A}^{x=A}=1-\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\,A=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\,A)=\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\frac{1}{A}.$$

**IV. 4)** • D'après IV. 2, on a : $P(E_n)\geq nP((|X_1|>2A)\cap\bigcap\limits_{i=2}^{n}(|X_i|<A))=nP(|X_1|>2A)\prod\limits_{i=2}^{n}P(|X_i|<A)$

$=nP(|X_1|>2A)(P(|X_1|<A))^{n-1}$, car les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes et de même loi.

• Soit $\lambda>0$, et $n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n>\lambda$, d'où : $0<\dfrac{\pi\lambda}{2n}<\dfrac{\pi}{2}$. On a donc : $\tan\dfrac{\pi\lambda}{2n}>0$, et l'on peut appliquer cette inégalité avec : $A=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}$. D'après IV. 3, on a : $P(|X_1|<A)=1-P(|X_1|\geq A)=1-P(|X_1|>A)$.

$$=1-\frac{2}{\pi}\text{Arc}\tan\frac{1}{A}=1-\frac{2}{\pi}\text{Arc}\tan(\tan\frac{\pi\lambda}{2n})=1-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi\lambda}{2n}=1-\frac{\lambda}{n}.$$

• La minoration précédente de $P(E_n)$ devient alors : $P(E_n)\geq n(P(|X_1|>\dfrac{2}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}})(1-\dfrac{\lambda}{n})^{n-1}$.

**IV. 5)** • Toujours d'après IV. 3, cette minoration s'écrit : $P(E_n)\geq(1-\dfrac{\lambda}{n})^{n-1}\dfrac{2n}{\pi}\text{Arc}\tan(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\pi\lambda}{2n})$.

Cherchons la limite de cette dernière expression quand $n\to+\infty$, $n\in\mathbb{N}^*$.

• La dérivée de la fonction : $x\mapsto\text{Arc}\tan x$ est : $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$, donc cette dérivée vaut 1 au point 0, ce qui permet d'affirmer : $\text{Arc}\tan x\sim x$ quand $x\to0$. En conséquence, quand $n\to+\infty$ :

$$\text{Arc}\tan(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi\lambda}{2n})\sim\frac{1}{2}\tan\frac{\pi\lambda}{2n}\sim\frac{1}{2}.\frac{\pi\lambda}{2n}=\frac{\pi\lambda}{4n}.$$

Par ailleurs, $(1-\dfrac{\lambda}{n})^{n-1}=\exp((n-1)\ln(1-\dfrac{\lambda}{n}))$, or : $(n-1)\ln(1-\dfrac{\lambda}{n})\sim n(-\dfrac{\lambda}{n})=-\lambda$ quand $n\to+\infty$.

Ce qui prouve : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{\lambda}{n})^{n-1}=e^{-\lambda}$, ou : $(1-\dfrac{\lambda}{n})^{n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-\lambda}$. D'où finalement :

$(1-\frac{\lambda}{n})^{n-1}\frac{2n}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi\lambda}{2n}) \sim e^{-\lambda}\frac{2n}{\pi}.\frac{\pi\lambda}{4n}=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}$. Autrement dit :

$\lim_{n\to+\infty}((1-\frac{\lambda}{n})^{n-1}\frac{2n}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi\lambda}{2n}))=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}$. Ceci signifie exactement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$ implique : $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}-\varepsilon<(1-\frac{\lambda}{n})^{n-1}\frac{2n}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi\lambda}{2n})<\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}+\varepsilon$. Pour tout entier *n* assez grand, on a donc :

$(1-\frac{\lambda}{n})^{n-1}\frac{2n}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi\lambda}{2n})>\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}-\varepsilon$, d'où : $P(E_n)>\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}-\varepsilon$.

**IV. 6)** • Dans cette inégalité, faisons : $\lambda := 1$, et soit un réel $\varepsilon > 0$. Pour tout entier *n* assez grand, on a : $P(E_n)>\frac{1}{2e}-\varepsilon$. L'inégalité : $\frac{1}{2e}-\varepsilon>\frac{1}{6}$ équivaut à : $\varepsilon<\frac{3-e}{6e}$. Comme : $2 < e < 3$, il est possible de choisir le réel $\varepsilon$ tel que : $0<\varepsilon<\frac{3-e}{6e}$, et alors on aura, pour tout entier *n* assez grand : $P(E_n)>\frac{1}{6}$.

## Partie V : le nombre $a_n$ est une puissance de n

**V. A. 1)** • Quelle que soit la variable aléatoire *X*, on a : $P(X > 0) + P(X < 0) + P(X = 0) = 1$ (système complet d'événements). Si de plus *X* est symétrique, alors : $P(X > 0) = P(X < 0)$.

Il en résulte immédiatement : $P(X>0)=\frac{1}{2}(1-P(X=0))$.

**V. A. 2)** • Les événements $A_n=(X>\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}^*$, forment une suite croissante, et : $(X>0)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(X>\frac{1}{n})$. En conséquence : $P(X>0)=\lim_{n\to+\infty}P(X>\frac{1}{n})$. Si l'on avait : $P(X>\frac{1}{n})=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, alors on en pourrait déduire : $P(X>0)=\lim_{n\to+\infty}P(X>\frac{1}{n})=0$. Mais comme la variable aléatoire *X* n'est pas nulle, elle vérifie : $P(X = 0) < 1$, d'où d'après V. A. 1 : $P(X>0)=\frac{1}{2}(1-P(X=0))>0$ $P(X > 0) > 0$. Il est ainsi prouvé qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$P(X>\frac{1}{n})>0$, et il existe donc un réel $\mu > 0$ tel que : $P(X>\mu) > 0$.

**V. A. 3) a)** • Soient $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Les variables aléatoires $X_k$ étant toutes indépendantes et suivant toutes la même loi, toute somme de *n* variables aléatoires (d'indices distincts) parmi elles suit la même loi, la même loi que $X_1+...+X_n$, donc que $a_nX$, ou que $a_nX_1$, ou que $a_nX_2$. En particulier, la variable aléatoire $X_{m+1}+...+X_{m+n}$ suit la même loi que $a_nX_2$.

• La variable aléatoire : $X_1+...+X_m$ suit la même loi que $a_mX_1$, la variable aléatoire : $X_{m+1}+...+X_{m+n}$ suit la même loi que $a_nX_2$, et les variables aléatoires $a_mX_1$ et $a_nX_2$ sont indépendantes. De plus, les variables aléatoires $X_1+...+X_m$ et $X_{m+1}+...+X_{m+n}$ sont indépendantes. La variable aléatoire :

$X_1+...+X_{m+n}=(X_1+...+X_m)+(X_{m+1}+...+X_{m+n})$ suit donc la même loi que $a_mX_1+a_nX_2$.

• Par ailleurs, par définition d'une variable aléatoire stable, la variable aléatoire $X_1+...+X_{m+n}$ suit la même loi que $a_{m+n}X$. Finalement, la variable aléatoire $a_{m+n}X$ suit la même loi que $a_mX_1+a_nX_2$.

**V. A. 3) b)** • Prouvons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ que pour tout *k*-uplet $(m_1,...,m_k)\in\mathbb{N}^{*k}$, la variable aléatoire $a_{m_1+...+m_k}X$ suit la même loi que : $a_{m_1}X_1+...+a_{m_k}X_k$. Cette assertion est trivialement vraie pour $k = 1$, et elle vraie pour $k = 2$ d'après V. A. 3. a. Supposons-la vraie pour un $k\in\mathbb{N}^*$, et soit : $(m_1,...,m_k,m_{k+1})\in\mathbb{N}^{*(k+1)}$.

D'après V. A. 3. a, la variable aléatoire $a_{m_1+...+m_k+m_{k+1}}X=a_{(m_1+...+m_k)+m_{k+1}}X$ suit la même loi que : $a_{m_1+...+m_k}X_1+a_{m_{k+1}}X_2$, ou que : $a_{m_1+...+m_k}X_1+a_{m_{k+1}}X_{k+1}$, et de plus : $a_{m_1+...+m_k}X_1$ et $a_{m_{k+1}}X_{k+1}$ sont indépendantes. D'après l'hypothèse de récurrence, la variable aléatoire : $a_{m_1+...+m_k}X_1$ suit la même loi que : $a_{m_1}X_1+...+a_{m_k}X_k$, et de plus :

$a_{m_1}X_1+...+a_{m_k}X_k$ et $a_{m_{k+1}}X_{k+1}$ sont indépendantes. Il en résulte que la variable aléatoire $a_{m_1+...+m_k}X_1+a_{m_{k+1}}X_{k+1}$ suit la même loi que : $(a_{m_1}X_1+...+a_{m_k}X_k)+a_{m_{k+1}}X_{k+1}$. Et finalement, $a_{m_1+...+m_k+m_{k+1}}X$ suit la même loi que : $a_{m_1}X_1+...+a_{m_k}X_k+a_{m_{k+1}}X_{k+1}$. *CQFD.*

**V. A. 3) c)** • En prenant tous les entiers $m_i$ égaux à un même entier $\ell\in\mathbb{N}^*$, on voit que la variable aléatoire $a_{k\ell}X$ suit la même loi que : $a_\ell X_1+...+a_\ell X_k=a_\ell(X_1+...+X_k)$, donc que : $a_\ell a_kX$. Et comme *X* n'est pas nulle, on en déduit : $a_{k\ell}=a_ka_\ell$, quels que soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $\ell\in\mathbb{N}^*$.

**V. A. 4)** • Soient $m\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$, $t\in\mathbb{R}$, $t > 0$. Comme les variables aléatoires $a_{m+n}X$ et $a_mX_1+a_nX_2$ suivent la même loi (question V. A. 3. a), on a : $P(a_mX_1+a_nX_2>a_nt)=P(a_{m+n}X>a_nt)=P(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}t)$.

• Si $X_1\geq 0$ et $X_2>t$, alors : $a_mX_1+a_nX_2>a_nt$. En termes d'événements, ceci s'écrit :

$(X_1\geq 0)\cap(X_2>t)\subset(a_mX_1+a_nX_2>a_nt)$. Il en résulte :

$P(a_mX_1+a_nX_2>a_nt)\geq P((X_1\geq 0)\cap(X_2>t))=P(X_1\geq 0)P(X_2>t)=P(X\geq 0)P(X>t)$.

• D'après V. A. 1, on a : $P(X>0)=\frac{1}{2}(1-P(X=0))$, d'où : $P(X\geq 0)=P(X>0)+P(X=0)=\frac{1}{2}(1+P(X=0))\geq\frac{1}{2}$.

• En regroupant ces résultats, il vient : $P(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}t)=P(a_mX_1+a_nX_2>a_nt)\geq P(X\geq 0)P(X>t)\geq\frac{1}{2}P(X>t)$.

**V. A. 5)** • D'après V. A. 2, il existe un réel $\mu > 0$ tel que : $P(X>\mu) > 0$.

D'après V. A. 4, on a, quels que soient $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$ : $P(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}\mu)\geq\frac{1}{2}P(X>\mu)>0$.

• D'après les propriétés de la fonction de répartition de toute variable aléatoire *X*, on peut affirmer : $\lim_{t\to+\infty}P(X>t)=0$.

Cela signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : $t > B$ implique : $P(X > t) < \varepsilon$. Prenons $\varepsilon=\frac{1}{2}P(X>\mu)$, et considérons le réel $B > 0$ correspondant. Puisque $P(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}\mu)\geq\frac{1}{2}P(X>\mu)=\varepsilon$, force est d'en déduire : $\frac{a_n}{a_{m+n}}\mu\leq B$, car : $\frac{a_n}{a_{m+n}}\mu>B$ impliquerait : $P(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}\mu)<\varepsilon$.

Il est ainsi prouvé que : $\frac{a_n}{a_{m+n}}\leq\frac{B}{\mu}$, quels que soient $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

• Si $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$, et si $n < p$, alors : $p = n + m$, avec $m\in\mathbb{N}^*$, d'où : $\frac{a_n}{a_p}=\frac{a_n}{a_{m+n}}\leq\frac{B}{\mu}$, soit : $a_n\leq\frac{B}{\mu}a_p$.

En posant $A=\operatorname{Max}(1,\frac{B}{\mu})$, il est clair que : $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ et $n\leq p$ impliquent : $a_n\leq Aa_p$. La suite $a_n$ satisfait aux deux conditions qui formaient l'hypothèse de la partie I. La conclusion de cette partie permet d'affirmer l'existence d'un réel $\alpha$ tel que : $a_n=n^\alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

**V. B. 1)** • Puisque les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et de même loi, les variables aléatoires : $X_1-X_2$ et $X_2-X_1$ suivent la même loi. Ceci signifie que la variable aléatoire $X_1-X_2$ est symétrique.

**V. B. 2)** • On suppose que *X* suit une loi stable, la suite associée étant $a_n$. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de copies de *X*. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, soit : $Z_k=X_{2k-1}-X_{2k}$. Alors, $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite de copies de $X_1-X_2$.

• Reprenons le raisonnement de V. A. 3. a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1+...+X_{2n-1}$ et $X_2+...+X_{2n}$ sont indépendantes, et $X_1+...+X_{2n-1}$ suit la loi de $a_nX_1$, et $X_2+...+X_{2n}$ suit la loi de $a_nX_2$, et les variables aléatoires $a_nX_1$ et $a_nX_2$ sont indépendantes. La variable aléatoire : $Z_1+...+Z_n=(X_1+...+X_{2n-1})-(X_2+...+X_{2n})$ suit donc la même loi que : $a_nX_1-a_nX_2=a_n(X_1-X_2)$.

• Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite quelconque de copies de $X_1-X_2$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire : $Y_1+...+Y_n$ suit la même loi que : $Z_1+...+Z_n$, donc que $a_n(X_1-X_2)$. Ceci démontre que la variable aléatoire : $X_1-X_2$ est stable, et que la suite $b_n$ associée est : $b_n=a_n$.

• Conclusion : puisque la variable aléatoire $X_1-X_2$ suit une loi stable et symétrique, d'après la partie V. A, il existe un réel $\alpha$ tel que : $a_n=n^\alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES
POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL

Concepteurs :
H.E.C.
E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION ECONOMIQUE

# MATHEMATIQUES II

Lundi 10 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans **tout** le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables.
On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $R_n$ l'événement « *pile apparaît au lancer de rang n* » et par $S_n$ l'événement « *face apparaît au lancer de rang n* »

## Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $a_n = \mathbf{P}([X = n])$.

1. a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

   b) Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

2. On désigne par $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

   On suppose que cette fonction est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(1)$$

   a) Établir pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0,1[$ l'égalité : $\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$.

   b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0,1[$ les inégalités suivantes : $0 \leqslant \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant f'(1)$.

   c) Montrer que, pour tout entier naturel $N$ non nul, on a : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$.
   En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

   d) À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0,1[$, les inégalités suivantes : $0 \leqslant \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$

   e) Montrer que la variable aléatoire $X$ admet une espérance donnée par :
$$\mathbf{E}(X) = f'(1)$$

## Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit $Y$ la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
*Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur* 9.
On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, on note $B_n$ l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et $U_n$ l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

2. a) Calculer, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement $B_n$.

   b) Vérifier que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, les événements $B_n, B_{n+1}$ et $B_{n+2}$ sont deux à deux incompatibles.

   c) En déduire les valeurs des nombres $u_3, u_4$ et $u_5$.

3. Soit $n$ un entier $n$ supérieur ou égal à 5.

   a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.

   b) Exprimer l'événement $U_{n+1}$ en fonction des événements $U_n$ et $B_{n+1}$ ; en déduire l'égalité suivante : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

   c) Vérifier les égalités suivantes $u_3 = u_2 + \dfrac{1}{8}(1-u_1)$ et $u_4 = u_3 + \dfrac{1}{8}(1-u_2)$.

   d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.

4. Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

   a) Préciser les nombres $v_1, v_2, v_3, v_4$.

   b) Exprimer, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et de $v_{n-2}$.

   c) En déduire pour tout entier $N$ supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante : $\dfrac{7}{8} - v_{N+3} = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} v_k$.

   d) Montrer que la série de terme général $v_n$ est convergente et calculer sa somme.

5. Soit $g$ et $h$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :
$$\forall x \in [0,1],\quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

   a) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et $U_n$ ($\overline{U_{n-1}}$ désignant l'événement contraire de $U_{n-1}$). En déduire l'égalité : $c_n = v_{n-1} - v_n$.

   b) Valider l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ dans le cas où $n$ est égal à 2 ou 3.

   c) Établir pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0,1]$, l'égalité : $g(x) = (x-1)h(x) + x$.

   d) Exprimer pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0,1[$, le quotient $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ en fonction de $h(x)$.

   e) Justifier la croissance de la fonction $h$ et, pour tout entier naturel $N$ non nul et tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0,1]$, la double inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leqslant h(x) \leqslant h(1)$.
   En déduire la relation suivante : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = h(1)$.

f) Montrer que $g$ est dérivable au point 1 et, à l'aide de la **Partie I**, en déduire que la variable aléatoire $Y$ admet une espérance égale à 8.

## Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs $J$ et $J'$ s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur $J$ est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur $J'$ est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur $J'$ possède un net avantage sur le joueur $J$.

**1.** Soit $Y'$ la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile lui-même précédé d'un face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
*Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire $Y'$ prend la valeur* 6.
Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, on désigne par $B'_n$ l'événement $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$, par $U'_n$ l'événement $\bigcup_{i=3}^{n} B'_i$ et on note $u'_n$ la probabilité de $U'_n$.

a) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
Les événements $B'_n, B'_{n+1}$ et $B'_{n+2}$ sont-ils deux à deux incompatibles ?

b) En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, le même raisonnement que dans la **Partie II**, conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3.

c) En déduire l'égalité des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u'_n)_{n\geqslant 1}$.

d) Prouver que les deux variables aléatoires $Y$ et $Y'$ suivent la même loi et vérifient : $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y')$.

**2.** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, on note $G_n$ l'événement « *le joueur $J$ est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang $n$* » et $g_n$ la probabilité de $G_n$.

a) Calculer $g_3$ et $g_4$ et établir, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire la probabilité pour que le joueur $J$ soit déclaré gagnant.

**3.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on désigne par $d_n$ la probabilité que lors des $n$ premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

a) Préciser $d_1$ et $d_2$.

b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel $n$ non nul, l'égalité suivante : $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.

c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles $\alpha$ et $\beta$ que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout tout entier naturel $n$ non nul, on ait : $d_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

d) En déduire que la série de terme général $d_n$ converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

**4.** On désigne par $T$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

a) Justifier, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'égalité : $\mathrm{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$.

b) En déduire, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, l'égalité : $\mathrm{P}([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

**5.** Calculer la probabilité que le joueur $J'$ soit déclaré gagnant et conclure.

**6.** Si la configuration gagnante du joueur $J$ avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et la configuration gagnante du joueur $J'$ avait été « face, face, pile, face, face, pile », quelle aurait-été la conclusion ?

**7.** Soit $d$ et $t$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n])x^n$$

a) Établir pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0,1]$ l'égalité suivante :

$$t(x) = (x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)}\right) + x$$

b) Exprimer pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0,1[$, le quotient $\frac{t(x)-t(1)}{x-1}$ en fonction de $d(x)$.

c) En s'inspirant de la question **5.e** de la **Partie II**, justifier l'égalité suivante : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} d(x) = d(1)$.

d) Montrer que la variable aléatoire $T$ admet une espérance et préciser $\mathbf{E}(T)$.

## Partie IV : Simulation informatique

On rappelle que dans un programme PASCAL, l'instruction « r :=RANDOM(2) » a pour effet de donner aléatoirement à la variable $r$ la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.
On considère la procédure PASCAL suivante :

```
PROCEDURE Quigagne;
  VAR x,y,r,k :INTEGER;
  BEGIN
      x :=0; y :=0;k :=0;
      WHILE (x<3) AND (y<3) DO
            BEGIN
              k :=k+1; r :=RANDOM(2);
              IF r=1 THEN BEGIN
                            IF x>=1 THEN x :=2 ELSE x :=1;
                            IF y>=1 THEN y :=y+1;
                          END
                    ELSE BEGIN
                            IF x=2 THEN x :=3
                                   ELSE x :=0;
                            y :=1;
                          END;
            END;
      IF x=3 THEN WRITE ('...') ELSE WRITE('...');
  END;
```

**1.** Donner sous forme d'un tableau les valeurs successives prises par les variables x, y et k lors de l'exécution de cette procédure, si les valeurs données à la variable r par la fonction « RANDOM(2) » sont successivement :

a) 1, 1, 1, 1, 0

b) 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1

c) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1

**2.** Que représente la dernière valeur prise dans la procédure par la variable $k$ et quels textes pourrait-on substituer aux pointillés de la dernière instruction ?
Qu'afficherait alors l'ordinateur dans les trois exemples de la question précédente ?

## Partie I : un résultat utile

**I. 1. a)** • La probabilité d'un événement est un réel positif ou nul, d'où : $a_n = P([X=n]) \geq 0$.

• L'hypothèse : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ implique : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in X(\Omega)} P([X=n]) = 1$.

**I. 1. b)** • Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leq a_n x^n \leq a_n$, et la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est donc convergente (comparaison des séries à termes positifs).

**I. 2. a)** • Pour : $x \in [0,1[$, on a : $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n)$

$= \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1-x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.

**I. 2. b)** • Il en résulte d'abord, pour $x \in [0,1[$ : $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \geq 0$.

• Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq y < 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq x^k \leq y^k$, d'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} y^k$. Comme $a_n \geq 0$, on en déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k)$, soit : $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \frac{f(1)-f(y)}{1-y}$. Ce qui prouve que la fonction : $x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante (au sens large) sur $[0,1[$.

• D'où, pour $x \in [0,1[$ : $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(1)$.

**I. 2. c)** • Pour : $x \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\sum_{n=1}^{N} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k)$ (car $a_n \geq 0$), soit :

$\sum_{n=1}^{N} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k) \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$. En passant à la limite quand $x \to 1$, $x < 1$, cette inégalité devient : $\sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$.

• De plus, bien sûr : $\sum_{n=1}^{N} n a_n \geq 0$.

• La série de terme général $n a_n$ est à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est donc croissante. Majorée par $f'(1)$, cette suite est convergente, et la série de terme général $n a_n$ est convergente.

**I. 2. d)** • Pour : $x \in [0,1[$, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq n$, d'où :

$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$.

• Et : $\sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$ implique : $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$.

**I. 2. e)** • Pour : $x \in [0,1[$, on a prouvé : $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$. En passant à la limite quand $x \to 1$, $x < 1$, il vient : $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = f'(1)$.

• Or, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = \sum_{n \in X(\Omega)} n P([X=n]) = \mathbf{E}(X)$, qui existe *ipso facto*.

Ainsi, la variable aléatoire $X$ admet une espérance : $\mathbf{E}(X) = f'(1)$.

## Partie II : loi du temps d'attente de la première configuration "pile, pile, face"

**II. 1.** • Comme $U_n \subset U_{n+1}$, on a : $u_n = P(U_n) \leq P(U_{n+1}) = u_{n+1}$, et la suite $u_n$ est croissante (au sens large), et majorée par 1 puisque $u_n$ est la probabilité d'un événement. La suite $u_n$ est donc croissante et convergente.

**II. 2. a)** • Pour $n \geq 3$, on a:
$P(B_n) = P(R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) = P(R_{n-2})P(R_{n-1})P(S_n) = \frac{1}{8}$.

**II. 2. b)** • Pour $n \geq 3$, on a : $B_n \cap B_{n+1} = ...$
$= (R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) \cap (R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1})$
$= R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \cap R_n \cap S_{n+1} = \emptyset$ car $S_n \cap R_n = \emptyset$. Donc $B_n$ et $B_{n+1}$ sont incompatibles, et par suite, il en est de même de $B_{n+1}$ et $B_{n+2}$.

• De plus, $B_n \cap B_{n+2} = (R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) \cap (R_n \cap R_{n+1} \cap S_{n+2})$
$= R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \cap R_n \cap R_{n+1} \cap S_{n+2} = \emptyset$ car $S_n \cap R_n = \emptyset$.
Donc, $B_n$ et $B_{n+2}$ sont incompatibles.

**II. 2. c)** • On a : $u_3 = P(U_3) = P(B_3) = \frac{1}{8}$.

• D'après la question II. 2. b :
$u_4 = P(U_4) = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{4}$.

• Et aussi : $u_5 = P(U_5) = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{3}{8}$.

**II. 3. a)** • Pour $n \geq 5$, on a : $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap B_{n+1}$
$= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) = U_{n-2} \cup B_{n-1}$,
puisque d'après II. 2. b : $B_{n-1} \cap B_{n+1} = B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$.

• Donc : $P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap (R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1}))$
$= P(U_{n-2})P(R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1}) = P(U_{n-2})P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_{n-2}$.

**II. 3. b)** • On a : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, d'où : $u_{n+1} = P(U_{n+1}) = ...$
$= P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$
$= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

**II. 3. c)** • Les valeurs de $u_n$, $n = 1, 2, ..., 5$, des questions II. 1 et II. 2. c conduisent à : $u_3 + \frac{1}{8}(1-u_1) = \frac{1}{4} = u_4$, et : $u_4 + \frac{1}{8}(1-u_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = u_5$. D'où : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ pour $n \geq 3$.

**II. 3. d)** • Soit $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, qui existe de par la question II. 1.

On a : $L = L + \frac{1}{8}(1 - L)$, d'où : $L = 1$.

• Par suite : $P(Y = 0) = 0$.

**II. 4. a)** • On a : $v_1 = 1 = 1 - u_1$, $v_2 = 1 = 1 - u_2$,
$v_3 = \frac{7}{8} = 1 - u_3$, $v_4 = \frac{3}{4} = 1 - u_4$.

**II. 4. b)** • Pour $n \geq 3$, on a :
$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n - \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}$.

**II. 4. c)** • L'égalité précédente s'écrit : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{8}v_{n-2}$, pour $n \geq 3$. Pour $N \geq 1$, on en déduit : $\sum\limits_{n=3}^{N+2}(v_{n+1} - v_n) = -\frac{1}{8}\sum\limits_{n=3}^{N+2} v_{n-2}$, somme télescopique au premier membre, qui donne :

$v_{N+3} - v_3 = -\frac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{N} v_k$, ou : $\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{N} v_k$.

**II. 4. d)** • Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (question II. 3. d), et que : $v_n = 1 - u_n$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

• D'après II. 4. c, on a : $\sum\limits_{k=1}^{N} v_k = 7 - 8v_{N+3}$, d'où : $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} v_k = 7$.

La série de terme général $v_n$ converge, et : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 7$.

**II. 5. a)** • Pour $n \geq 4$, on a : $[Y = n] = U_n \cap \overline{U_{n-1}} = U_n \backslash U_{n-1}$, d'où, puisque $U_{n-1} \subset U_n$ : $c_n = P([Y = n]) = P(U_n) - P(U_{n-1})$
$= u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n$.

**II. 5. b)** • On a : $c_2 = P([Y = 2]) = 0$, $v_1 - v_2 = 1 - 1 = 0$, d'où : $c_2 = v_1 - v_2 = 0$.

• Et de plus : $c_3 = P([Y = 3]) = P(R_1 \cap R_2 \cap S_3) = \frac{1}{8}$, et :
$v_2 - v_3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$, d'où : $c_3 = v_2 - v_3$.

**II. 5. c)** • On a : $(x-1)h(x) + x = (x-1)\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} v_{k-1}x^k - (v_1 x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n x^n) + x$

$=\sum\limits_{k=2}^{+\infty} v_{k-1}x^k - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(v_{n-1} - v_n)x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = g(x)$.

**II. 5. d)** • On a : $g(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P([Y = n]) = 1 - P([Y = 0]) = 1$.

• L'égalité de II. 5. c s'écrit alors : $g(x) - g(1) = ...$
$= (x-1)h(x) + (x-1)$, d'où, pour $x \in [0, 1[$ : $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = h(x) + 1$.

**II. 5. e)** • La même démonstration qu'en I. 2. b permet d'affirmer que la fonction $h$ est croissante sur $[0, 1]$, parce que les coefficients $v_n$ sont positifs.

• Par suite : $h(x) \leq h(1)$ pour $x \in [0, 1]$.

• On a, pour $N \geq 1$ et $x \in [0, 1]$ : $\sum\limits_{k=1}^{N} v_k x^k \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k x^k = h(x)$.

• Croissante sur $[0, 1]$ et donc majorée sur $[0, 1]$ par $h(1)$, la fonction $h$ admet une limite finie $L = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)$. L'encadrement : $\sum\limits_{k=1}^{N} v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$ implique alors : $\sum\limits_{k=1}^{N} v_k \leq L \leq h(1)$. D'où : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k \leq L \leq h(1)$.

Comme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k = h(1)$, on en conclut : $L = h(1)$, soit : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = h(1)$.

**II. 5. f)** • En II. 5. d, on a vu, pour $x \in [0, 1[$ : $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = h(x) + 1$. Par suite, $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ admet une limite finie quand $x \to 1$, $x < 1$, et cette limite est : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(h(x) + 1) = h(1) + 1 = 8$, car $h(1) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k = 7$ de par la question II. 4. d. Ceci prouve que $g'(1)$ existe, et que : $g'(1) = 8$.

• Puisque la fonction $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P([Y = n])x^n$ est dérivable pour $x = 1$, on a vu à la partie I que $\mathbf{E}(Y) = g'(1)$, soit : $\mathbf{E}(Y) = 8$.

## Partie III : paradoxe de Walter Penney

**III. 1. a)** • Pour $n \geq 3$, on a, comme en II. 2. b : $B'_n \cap B'_{n+1} = ...$
$= (S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n) \cap (S_{n-1} \cap R_n \cap R_{n+1})$
$= S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n-1} \cap R_{n+1} = \emptyset$ car $R_{n-1} \cap S_{n-1} = \emptyset$. Donc $B'_n$ et $B'_{n+1}$ sont incompatibles, et par suite, il en est de même de $B'_{n+1}$ et $B'_{n+2}$.

• De plus, $B'_n \cap B'_{n+2} = (S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n) \cap (S_n \cap R_{n+1} \cap R_{n+2})$
$= S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n \cap S_n \cap R_{n+1} \cap R_{n+2} = \emptyset$ car $R_n \cap S_n = \emptyset$.
Donc, $B'_n$ et $B'_{n+2}$ sont incompatibles.

**III. 1. b)** • Pour $n \geq 5$, on a comme en II. 3. b :

$U'_n \cap B'_{n+1} = U'_{n-2} \cap B'_{n+1}$, d'où : $P(U'_n \cap B'_{n+1}) = P(U'_{n-2} \cap B'_{n+1}) = \frac{1}{8}u'_{n-2}$, et par suite : $u'_{n+1} = P(U'_{n+1}) = P(U'_n \cup B'_{n+1}) = ...$

$= P(U'_n) + P(B'_{n+1}) - P(U'_n \cap B'_{n+1})$

$= u'_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u'_{n-2} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$.

• Comme en II. 3. c, cette égalité se prolonge à : $n = 3$ et $n = 4$ : $u'_4 = u'_3 + \frac{1}{8}(1 - u'_1)$, $u'_5 = u'_4 + \frac{1}{8}(1 - u'_2)$.

**III. 1. c)** • Les deux suites : $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(u'_n)_{n\geq 1}$ sont régies par la même relation de récurrence (affine) d'ordre 3. Pour $n \geq 3$, chaque terme est donc déterminé par la donnée des trois précédents, de la même manière : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$, $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$. Comme de plus : $u_1 = u'_1 = 0$, $u_2 = u'_2 = 0$, $u_3 = u'_3 = \frac{1}{8}$, une récurrence immédiate permet d'affirmer que : $u_n = u'_n$ pour tout $n \geq 1$.

**III. 1. d)** • Comme en II. 5. a, on peut voir que, pour $n \geq 2$ :

$P([Y' = n]) = P(U'_n) - P(U'_{n-1}) = u'_n - u'_{n-1} = u_n - u_{n-1} = P([Y = n])$.

Ceci prouve que les variables aléatoires $Y$ et $Y'$ suivent la même loi.

On en déduit : $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y')$.

**III. 2. a)** • L'événement $G_3$ est réalisé par les résultats successifs : $(pile, pile, face)$, d'où : $g_3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

• L'événement $G_4$ est réalisé par les résultats successifs : $(pile, pile, pile, face)$, d'où : $g_4 = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

• Pour $n \geq 4$, l'événement $G_n$ est réalisé par une suite de résultats se terminant par : $(pile, pile, face)$, avec jamais de $(face)$ précédemment, sans quoi le joueur $J'$ aurait déjà gagné auparavant. La suite de résultats réalisant l'événement $G_n$ est donc : $(pile, ..., pile, pile, face)$, soit $n-1$ fois $(pile)$ suivis de $(face)$. La probabilité de cette suite de résultats est : $g_n = (\frac{1}{2})^n$.

**III. 2. b)** • Soit $G$ l'événement "le joueur $J$ est déclaré gagnant", qui s'exprime par : $G = \bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n$, et a donc pour probabilité :

$$P(G) = P(\bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} g_n = \sum_{n=3}^{+\infty} (\tfrac{1}{2})^n = \frac{(\frac{1}{2})^3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

**III. 3. a)** • Il est clair que : $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{3}{4}$.

**III. 3. b)** • Notons $D_n$ l'événement "lors des $n$ premiers lancers, n'apparaissent jamais deux piles consécutifs". On a, pour $n \geq 1$ :

$D_{n+2} = (D_{n+1} \cap S_{n+2}) \cup (D_n \cap S_{n+1} \cap R_{n+2})$, d'où :

$d_{n+2} = P(D_{n+2}) = P(D_{n+1} \cap S_{n+2}) + P(D_n \cap S_{n+1} \cap R_{n+2})$

$= P(D_{n+1})P(S_{n+2}) + P(D_n)P(S_{n+1})P(R_{n+2}) = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.

**III. 3. c)** • La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ satisfait à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est :

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, dont les racines sont : $\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Il existe donc $\alpha$ et $\beta$ réels (calculables en fonction de $d_1$ et $d_2$) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $d_n = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n$.

**III. 3. d)** • L'encadrement : $2 < \sqrt{5} < 3$ donne : $\frac{3}{4} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$, et : $-\frac{1}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < -\frac{1}{4}$. Les séries géométriques de termes généraux $(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n$ et $(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n$ sont convergentes car leur raison est dans $]-1, 1[$, et il en est de même de la série de terme général $d_n$, qui en est une combinaison linéaire.

• Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$. Alors : $S = d_1 + d_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} d_n$

$= d_1 + d_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (\frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{4}d_{n-2}) = d_1 + d_2 + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-2}$

$= d_1 + d_2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} d_k + \frac{1}{4}\sum_{h=1}^{+\infty} d_h = d_1 + d_2 + \frac{1}{2}(S - d_1) + \frac{1}{4}S$.

D'où : $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})S = d_1 + d_2 - \frac{1}{2}d_1$, soit : $\frac{1}{4}S = \frac{5}{4}$, ou enfin : $S = 5$.

**III. 4. a)** • L'événement : $[T > n] \cup [T = 0]$ se produit si aucun des joueurs n'est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang $n$, soit si l'on ne voit jamais apparaître : $(pile, pile, face)$ ni $(face, pile, pile)$ au cours des $n$ premiers lancers. Ceci se produit si et seulement si les $n$ premiers lancers ne donnent que des piles *ou bien* ne donnent jamais deux piles consécutifs : $[T > n] \cup [T = 0] = (\bigcup_{i=1}^{n} R_i) \cup D_n$. D'où, pour $n \geq 2$ :

$$P([T > n] \cup [T = 0]) = P(\bigcup_{i=1}^{n} R_i) + P(D_n) = \frac{1}{2^n} + d_n.$$

**III. 4. b)** • Le résultat de la question précédente s'écrit, pour $n \geq 2$ : $P([T > n]) + P([T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$. On en déduit, pour $n \geq 3$ :

$P([T > n-1]) + P([T = 0]) = \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1}$. En conséquence :

$P([T > n-1]) - P([T \geq n]) = (\frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1}) - (\frac{1}{2^n} + d_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

• Or, $P([T > n-1]) = P([T \geq n]) = P([T = n]) + P([T > n])$. D'où : $P([T = n]) = P([T > n-1]) - P([T \geq n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

**III. 4. c)** • Probabilité qu'un des joueurs soit déclaré gagnant :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} P([T = n]) = \sum_{n=3}^{+\infty} (\tfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \tfrac{1}{2^n} + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n$$

$= \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} + d_2 = 1$.

**III. 5.** • Soit $G'$ l'événement "le joueur $J'$ est déclaré gagnant". D'après III. 4. c, on a : $P(G \cup G') = 1$, et comme bien sûr : $G \cap G' = \emptyset$, et que

$P(G) = \frac{1}{4}$ (question III. 2. b), on en conclut : $P(G') = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

**III. 6.** • Si les configurations gagnantes respectives étaient celles de la présente question, l'une s'obtiendrait à partir de l'autre par échange de pile et face, et comme ces deux éventualités ont la même probabilité, les probabilités de gain de $J$ et $J'$ auraient été les mêmes, chacune égale à $\frac{1}{2}$.

**III. 7. a)** • On a : $t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T=n])x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} (\frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n)x^n$

$= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n}x^n + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1}x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} (\frac{x}{2})^n + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k x^{k+1} - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n$

$= \frac{\frac{x^3}{8}}{1-\frac{x}{2}} + x(d(x) - d_1 x) - (d(x) - d_1 x - d_2 x^2)$

$= \frac{1}{4}x^2(\frac{x}{2-x} - 1) + (x-1)d(x) + x = (x-1)(\frac{x^2}{2(2-x)} + d(x)) + x.$

**III. 7. b)** • En III. 4. b, on a vu que : $t(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T=n]) = 1$.

• Par suite, pour $x \in [0,1[$ :
$\frac{t(x)-t(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}((x-1)(\frac{x^2}{2(2-x)} + d(x)) + x - 1) = \frac{x^2}{2(2-x)} + d(x) + 1.$

**III. 7. c)** • Comme en I. 2. b et en II. 5. e, la fonction : $d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$ est croissante sur $[0,1]$, car les coefficients $d_n$ sont positifs. Pour $x \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{N} d_k x^k \leq d(x) \leq d(1)$, et il existe : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} d(x) = L \leq d(1)$.

En passant à la limite quand $x \to 1, x < 1$, il vient : $\sum_{k=1}^{N} d_k \leq L \leq d(1)$, et en passant à la limite quand $N \to +\infty$, il vient : $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \leq L \leq d(1)$, or : $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = d(1)$, d'où : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} d(x) = L = d(1)$. *Bis repetita placent.*

**III. 7. d)** • En III. 3. d, on a vu : $d(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$. D'après III. 7 b, on a : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{t(x)-t(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (\frac{x^2}{2(2-x)} + d(x) + 1) = \frac{13}{2}$. Ainsi, la fonction $t$ est dérivable au point 1, et : $t'(1) = \frac{13}{2}$. De par I. 5. e, il s'ensuit : $\mathbf{E}(T) = \frac{13}{2}$.

## Partie IV : simulation informatique

**IV. 1)** • Voici le tableau des valeurs succcessives prises par les variables $k, x, y$ lors de l'application de la procédure QuiGagne, dans chacun des trois exemples proposés par l'énoncé :

**IV. 1) a)** •

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***r*** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| ***k*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ***x*** | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ***y*** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**IV. 1) b)** •

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***r*** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ***k*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ***x*** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| ***y*** | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |

**IV. 1) c)** •

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***r*** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| ***k*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ***x*** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| ***y*** | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 |

**IV. 2)** • Le programme faisant appel à la procédure QuiGagne s'arrête lorsque $x = 3$ (et alors $y = 1$) ou bien lorsque $y = 3$ (et alors $x = 2$). On a : $x = 3$ si dans la suite des valeurs de $r$, apparaît la configuration 110, et l'on a : $y = 3$ si dans la suite des valeurs de $r$, apparaît la configuration 011.

Si l'on convient que 0 représente *face* et que 1 représente *pile* (équiprobables en raison des propriétés de la fonction RANDOM), alors chaque appel de la fonction RANDOM simule un lancer de la pièce équilibrée, et l'exécution de cette procédure simule le jeu décrit en tête de la partie III. La dernière valeur de la variable $k$ représente le rang du dernier lancer du jeu, à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, c'est–à-dire la valeur de la variable aléatoire $T$. Ce joueur déclaré gagnant est $J$ s'il apparaît 110, soit si : $x = 3$, et c'est $J'$ s'il apparaît 011, soit si : $y = 3$.

La dernière instruction doit donc être complétée ainsi :

```
IF x=3 THEN WRITE ('Le joueur J gagne.')
        ELSE WRITE ('Le joueur J'' gagne.') ;
```

(on écrit J” pour que l'ordinateur affiche J').

Ainsi, cette procédure mérite son nom : QuiGagne.

• Dans l'exemple IV. 1. a, l'ordinateur affichera : Le joueur J gagne.
Dans l'exemple IV. 1. b, l'ordinateur affichera : Le joueur J' gagne.
Dans l'exemple IV. 1. c, l'ordinateur affichera : Le joueur J' gagne.