Corrigés des épreuves de mathématiques sp (voie S et voie E)

François Delaplace (voie E), **Pierre Girard** (voie S)
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3.

2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.

4. a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1\,;1[$, que l'on explicitera.

c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.

1/4

2005

écifiques à l'EM Lyon

Grandchamp (Versailles).

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$\sin^2\theta\; T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\; T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)\,T_n(\cos\theta) = 0\ .$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin\theta\; T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta\,.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(\mathrm{X}^2-1)\,T_n'' + 3\,\mathrm{X}\,T_n' - (n^2+2n)\,T_n = 0\ .$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré inférieur ou égal à n.
On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (\mathrm{X}^2-1)P'' + 3\mathrm{X}P'\ .$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E, associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi\big(L(P), Q\big) = \varphi\big(P, L(Q)\big)\,.$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi\big(L(P), Q\big) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\; P'(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Établir que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

2/4

Deuxième problème

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0;\pi]$:

$$\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it} = \frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,e^{\frac{i(m+1)t}{2}} \quad , \text{ puis } \quad \sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit l'application $f : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0;\pi]$, et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

5.a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt$.

b. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ et montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1.a. Montrer que, pour tout couple $(x,y) \in ([0;+\infty[)^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3.a. Établir : $\forall (x,y) \in \left([0;+\infty[\right)^2$, $S(y) - S(x) = (y-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b. En déduire : $\forall (x,y) \in \left([0;+\infty[\right)^2$, $|S(y) - S(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{6}|y-x|$.

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0;+\infty[$.

4.a. Montrer, pour tout couple (x,y) de $\left([0;+\infty[\right)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\quad S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0;+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1;+\infty[,\quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)\,dt \leqslant \varphi(n)$,

et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt$.

c. Conclure : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

7.a. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Premier problème

I- Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. En appliquant la définition de la suite : $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = \underline{4X^2 - 1}$ et $T_3 = 2X(\underbrace{4X^2-1}_{T_2}) - \underbrace{2X}_{T_1} = \underline{8X^3 - 4X}$

2. a. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :
$\mathcal{P}(n) =$ "Le monôme de plus haut degré de T_n est 2^nX^n"
La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0 = 1 = 2^0X^0$ et $T_1 = 2X = 2^1X^1$. Soit n un entier naturel quelconque $\geqslant 1$ et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leqslant n$; Ce qui signifie que pour tout $k \leqslant n$, il existe un polynôme U_k de degré strictement inférieur à k tel que $T_k = 2^kX^k + U_k$. Et puisque $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, on a $T_{n+1} = 2X\underbrace{(2^nX^n + U_n)}_{T_n} - \underbrace{(2^{n-1}X^{n-1} + U_{n-1})}_{T_{n-1}}$
c'est à dire : $T_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + \left(2XU_n - 2^{n-1}X^{n-1} - U_{n-1}\right)$.
Posons alors $U_{n+1} = 2XU_n - 2^{n-1}X^{n-1} - U_{n-1}$: On a
$deg(U_{n+1}) \leqslant max\left(deg(2XU_n), deg(2^{n-1}X^{n-1}), deg(U_{n-1})\right) < max\,(1 + (n-1), n-1, n-1)$
donc $deg(U_{n+1}) < n$ et $T_{n+1} = 2^{n+1} + U_{n+1}$. Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ deg(T_n) = n \text{ et son coefficient de degré } n \text{ est } 2^n} \qquad (1)$$

   b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition : $\mathcal{Q}(n) =$"$T_n(-X) = (-1)^nT_n(X)$". La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$. Soit n un entier naturel quelconque $\geqslant 1$ et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leqslant n$; On a alors :
$$\begin{aligned}T_{n+1}(-X) &= 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X)\\ &= (-1)^{n+1}2XT_n(X) - (-1)^{n-1}T_{n-1}(X)\\ &= (-1)^{n+1}\left[2XT_n(X) - T_{n-1}(X)\right]\\ &= (-1)^{n+1}T_{n+1}(X)\end{aligned}$$
Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(-X) = (-1)^nT_n(X)} \qquad (2)$$
Conclusion : $\boxed{\text{Si } n \text{ est pair alors } T_n \text{ est pair et si } n \text{ est impair alors } T_n \text{ est impair}}$.

3. On peut faire quelques essais et s'apercevoir que, pour n =0, 1, 2 et 3, $T_n(1) = n + 1$. Montrons-le par récurrence : Soit $\mathcal{R}(n) =$"$T_n(1) = n$". La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0(1) = 1$ et $T_1(1) = 2.1 = 2$.
Soit n un entier naturel quelconque ≥ 1 et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{R}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leqslant n$; On a alors :
$$T_{n+1}(1) = 2.1T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2(n+1) - n = n + 2$$
Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = n + 1} \qquad (3)$$

4. a. On pourrait facilement raisonner par récurrence mais pour changer, utilisons une méthode qui nous fera réviser une autre partie du programme. Posons, pour tout entier naturel : $u_n = T_n(\cos\theta)$; on définirait ainsi une suite numérique récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :
$$\begin{cases} u_0 = T_0(\cos\theta) = 1,\\ u_1 = T_1(\cos\theta) = 2\cos\theta,\\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = 2\cos\theta u_{n-1} - u_{n-2}\end{cases}$$
L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :
$$Z^2 - 2\cos\theta Z + 1 = 0$$
son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta < 0$ car $\theta \in]0;\pi[$. Ses racines sont donc : $Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $Z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ (puisque $\theta \in]0;\pi[$, $\sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$).
Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta$. On trouve A et B en résolvant le système :
$$\begin{cases} u_0 = 1 = A\\ u_1 = 2\cos\theta = A\cos\theta + B\sin\theta\end{cases}$$
Ce qui donne immédiatement : $A = 1$ et $B = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (On rappelle que $\sin\theta \neq 0$ car $\theta \in]0;\pi[$)
Finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos n\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta = \frac{\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$
En conclusion :
$$\boxed{T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}} \qquad (4)$$

   b. Soit $n \geqslant 1$; Pour tout réel $\theta_k = k.\dfrac{\pi}{n+1}$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n$) on a $\theta_k \in]0;\pi[$ et $\sin(n+1)\theta_k = \sin k\pi = 0$ donc,d'après la question précédente, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$ $T_n\left[\cos\theta_k\right] = 0$.
$\cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_n$ sont donc n racines réelles de T_n. Elles sont distinctes car la fonction cos est strictement décroissante sur $]0;\pi[$. T_n étant de degré n d'après la question 2°)a), On en déduit que l'on a là toutes les racines de T_n.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ a } n \text{ racines : } \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \ldots, \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}$

c. Pour tout entier $n \geqslant 1$, T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^n et de racines $\cos\left(\dfrac{\theta}{n+1}\right), \ldots, \cos\left(\dfrac{n\theta}{n+1}\right)$, donc, d'après le théorème de factorisation des polynômes :

$$\boxed{T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

d. En particulier, pour $X = 1$, $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \underbrace{(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1})}_{2\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}}$, d'où, compte tenu de (3) :

$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(2\sin^2\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$,d'où : $\prod_{k=1}^{n}\left(\sin^2\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \dfrac{n+1}{4^n}$ c'est à dire :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \sqrt{\frac{n+1}{4^n}}}$$

5. a. Comme indiqué dans l'énoncé, utilisons la fonction $g : \theta \mapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta$. Cette fonction est bien la fonction nulle d'après (4) elle est donc deux fois dérivable sur $]0;\pi[$ avec, successivement :
$g'(\theta) = \cos\theta\, T_n(\theta) - \sin^2\theta\, T_n'(\theta) - (n+1)\cos(n+1)\theta$

$$\underbrace{g"(\theta)}_{0} = -\sin\theta T_n(\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta T_n'(\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta T_n'(\cos\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \sin^3\theta T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2 \underbrace{\sin(n+1)\theta}_{\sin\theta . T_n(\cos\theta)}$$

C'est à dire :
$\underbrace{g"(\theta)}_{0} = -\sin\theta\left[T_n(\cos\theta) + 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) - \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - (n+1)^2 T_n(\cos\theta)\right]$
En simplifiant par le réel non nul $(-\sin\theta)$, on en déduit que, pour tout θ de $]0;\pi[$,

$$T_n(\cos\theta) + 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) - \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - (n+1)^2 T_n(\cos\theta) = 0$$

c'est à dire :

$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0$$

b. On en déduit que, pour tout u de $]-1;1[$, puisque $\cos\theta$ décrit $]-1;1[$ lorsque θ décrit $]0;\pi[$,

$$(1-u^2)T_n''(u) - 3uT_n'(u) + (n^2+2n)T_n(u) = 0$$

D'où enfin :

$$\forall u \in]-1;1[,\ (u^2-1)T_n''(u) + 3uT_n'(u) - (n^2+2n)T_n(u) = 0$$

Le polynôme $(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n$ a donc une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.
Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0}$$

II- 1. On note déjà que si P est un élément de E alors P' et P'' sont des éléments de E donc $L(P)$ est aussi un élément de E. Deplus, si P et Q sont des éléments de E et si k est un réel alors

$$\begin{aligned} L(kP+Q) &= (X^2-1)(kP''+Q'') + 3X(kP'+Q') \\ &= k\left[(X^2-1)P'' + 3XP'\right] + (X^2-1)Q'' + 3XQ' \\ &= kL(P) + L(Q) \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que $\underline{L \text{ est un endomorphisme de } E}$

2. a. Pour tout k de $\{0,1,\ldots,n\}$, $L(T_k) = (X^2-1)T_k'' + 3XT_k'$ donc, d'après I-5-b,

$$\boxed{L(T_k) = (k^2+2k)T_k}$$

b. Aucun des polynômes T_k n'étant nuls, on en déduit que $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$ T_k est un vecteur propre de L associé à la valeur propre k^2+2k.
Les nombres k^2+2k étant tous distincts lorsque k décrit $\{0,1,\ldots,n\}$ (par exemple parce que l'application $t \mapsto t^2+2t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$), on en déduit que L a $(n+1)$ valeurs propres distinctes et puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, il est donc diagonalisable ; le sous-espace propre associé à la valeur propre k^2+2k étant $vect\{T_k\}$ (donc de dimension 1).

III- 1. Soient P, Q et R trois éléments de E et k un réel. D'une part $\varphi(P,Q)$ est bien un réel (Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[-1;1]$), d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(kP+Q,R) &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(kP(x)+Q(x))R(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(kP(x)R(x)+Q(x)R(x))\,dx \\ &= k\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)R(x)\,dx + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}Q(x)R(x)\,dx \\ &= k\varphi(P,R) + \varphi(Q,R) \end{aligned}$$

et $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}Q(x)P(x)\,dx = \varphi(Q,P)$

$\underline{\varphi \text{ est donc une forme bilinéaire symétrique sur } E}$ et $\underline{\varphi(P,P) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P^2(x)\,dx \geqslant 0}$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $[-1;1]$. Enfin, si $\varphi(P,P) = 0$ alors $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P^2(x)\,dx = 0$ or l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment n'est nulle que si cette fonction est nulle sur ce segment ; ce qui signifie ici que $\forall x \in [-1;1]$ $\sqrt{1-x^2}P^2(x) = 0$ donc $\forall x \in]-1;1[$ $P^2(x) = 0$ donc P est nul sur $]-1;1[$, il a donc une infinité de racine : c'est donc le polynôme nul. Conclusion : $\underline{(\varphi(P,P)=0) \Rightarrow (P=0)}$
Tous ces résultats nous démontrent bien que

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

2. Par intégration par parties :
$u : x \mapsto u(x) = -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)$ et Q sont de classe C^1 sur $[-1;1]$,
$u'(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}[3xP'(x) - (1-x^2)P''(x)]$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(L(P),Q\right) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}[L(P)](x)Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}[(x^2-1)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}[-(1-x^2)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} u'(x)Q(x)\,dx \\
&= u(1)Q(1) - u(-1)Q(-1) - \int_{-1}^{1} u(x)Q'(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{1} -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)\,dx
\end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\boxed{\varphi\left(L(P),Q\right) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)\,dx}$$

Par le même calcul et en échangeant les rôles de P et Q, on trouverait :
$\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}Q'(x)P'(x)\,dx = \varphi\left(L(Q),P\right)$; on a donc bien :

$$\boxed{\varphi\left(L(P),Q\right) = \varphi\left(P,L(Q)\right)}$$

3. L est donc un endomorphisme <u>symétrique</u> de E. On sait alors que des vecteurs propres de L associés à des valeurs propres distinctes formeront toujours une famille libre orthogonale ; c'est le cas de $\{T_0,\dots,T_n\}$ qui est donc une famille libre et orthogonale ; puisqu'elle contient $n+1$ éléments de E qui est de dimension $n+1$, on en conclut que

$$\boxed{\{T_0,\dots,T_n\} \text{ est une base orthogonale de } E}$$

Deuxième problème

I- 1. La fonction à intégrer est clairement continue sur $[0;\pi]$, on effectue alors une intégration par parties en posant $u(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et $v(t) = \dfrac{1}{n}\sin(nt)$, on définit des fonctions de classe C^1 sur $[0;\pi]$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,dt
\end{aligned}$$

De la même façon, on effectue une intégration par parties en posant $u_1(t) = \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $v_1(t) = -\dfrac{1}{n}\cos(nt)$, on définit des fonctions de classe C^1 sur $[0;\pi]$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,dt &= \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\cos(nt)\,dt \\
&= -\frac{1}{n} + 0
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}}$

2. De façon classique, aucun des dénominateurs des fractions suivantes n'étant nuls car $t \in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}} &= \frac{e^{im\frac{t}{2}}(e^{-imt/2} - e^{imt/2})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-it/2} - e^{it/2})} \\
&= \frac{-2i\sin(mt/2)}{-2i\sin(t/2)}\,e^{i(m-1)\frac{t}{2}} \\
&= \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\,e^{i(m-1)\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\dfrac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}\,e^{it} = \dfrac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\,e^{i(m+1)\frac{t}{2}}}$

On a alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \sum_{n=1}^{m}\mathcal{R}e(e^{int}) = \mathcal{R}e\left(\sum_{n=1}^{m}(e^{it})^n\right)$ et en utilisant les propriétés des suites géométriques de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \mathcal{R}e\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\,e^{i(m+1)\frac{t}{2}}\right)$$

En conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\,\cos(m+1)\frac{t}{2}}$

3. Soit $v : t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)$, u et v sont de classe C^1 et $v'(t) = \sin(\lambda t)$ donc avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} u(t)\sin(\lambda t)\,dt &= u(\pi)v(\pi) - u(0)v(0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi} u'(t)\cos(\lambda t)\,dt \\
&= -\frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi} u'(t)\cos(\lambda t)\,dt
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\lambda > 0$, $\left|-\frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)+\frac{u(0)}{\lambda}\right| \leqslant \frac{|u(\pi)+u(0)|}{\lambda}$

On en déduit que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} -\frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)+\frac{u(0)}{\lambda} = 0$ par le théorème d'encadrement des limites. De même $\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)\cos(\lambda t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)|\,dt$; puisque $\int_0^\pi |u'(t)|\,dt$ est un réel indépendant de λ, on en déduit que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)|\,dt = 0$ Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0}$$

4. Nous allons appliquer ici le théorème mal nommé du « prolongement des fonctions de classes C^1 » :
   i. f est C^1 sur $]0;\pi]$ comme quotient de deux fonctions C^1 sur $]0;\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, sur $]0;\frac{\pi}{2}]$, la fonction sin ne s'annule pas donc sur $]0;\pi]$, la fonction $t \mapsto \sin t$ ne s'annule pas non plus.
   ii. f est continue en 0 ; en effet d'une part $\frac{t^2}{2\pi}-t \underset{t\to0}{\sim} -t$, d'autre part $2\sin\frac{t}{2} \underset{t\to0}{\sim} t$ donc $f(t) \underset{t\to0}{\sim} -1$. Ainsi $\lim\limits_{t\to0} f(t) = -1 = f(0)$. D'où la continuité de f en 0 et donc sur $[0;\pi]$ (puisque, f étant C^1 sur $]0;\pi]$, est aussi continue sur $]0;\pi]$).
   iii. Enfin f' a une limite en 0^+ ; En effet :

$$\begin{aligned}
\forall t \in]0;\pi],\ f'(t) &= \frac{(\frac{t}{\pi}-1)\sin\frac{t}{2}-(\frac{t^2}{2\pi}-t)\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \\
&= \frac{(\frac{t}{\pi}-1)(\frac{t}{2}+o(t^2))-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{2\pi}-t)(1-\frac{t^2}{4}+o(t^2))}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)} \\
&= \frac{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2\pi}+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4\pi}+o(t^2)}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{4\pi}}{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

c'est à dire $f'(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$. D'où enfin :

$\boxed{\lim\limits_{t\to0} f'(t) = \frac{1}{2\pi}}$ De ces trois points, on déduit de ce théorème que :

$$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } [0;\pi] \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2\pi}}$$

5. a) En utilisant la question 1, la question 2 et la linéarité de l'intégration, on écrit :

$$\begin{aligned}
\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{m}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos(m+1)\frac{t}{2}\,dt \\
&= \int_0^\pi f(t)\underbrace{2\sin(m\frac{t}{2})\cos(m+1)\frac{t}{2}}_{\sin(2m+1)\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt - \int_0^\pi \underbrace{f(t)\sin\frac{t}{2}}_{\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)}\,dt \\
&= \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt - \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi \\
&= \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt + \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

b) f étant de classe C^1 d'après la question 4, nous savons d'après la question 3 (avec $u = f$ et $\lambda = \frac{(2m+1)t}{2}$) que $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt = 0$. Il s'en suit que $\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}$ a une limite lorsque $n \to +\infty$ (mais nous le savions déjà par un théorème sur les séries de référence...) et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

II- 1. a) Clairement : pour tout couple (x,y) de $([0;+\infty[)^2$, la série de terme général $\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ est à termes positifs et $\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et puisque la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, le critère d'équivalence des séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ converge. Un raisonnement analogue permet d'affirmer de même que la série $\sum\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ converge.

b) $\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right) = x\sum\frac{1}{n(n+x)}$ donc la série converge d'après 1°)a) avec $y = 0$.

2. $S(0) = \sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\forall N \in \mathbb{N}^*\ \sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}$

ainsi, $S(1) = \lim\limits_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{N+1} = 1$.

3. a. Puisque toutes les séries en présence sont convergentes, on peut écrire : $\forall(x,y)$ de $([0;+\infty[)^2$

$$\begin{aligned} S(y)-S(x) &= \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}\right)-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+y}\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{y-x}{(n+x)(n+y)}\\ &= (y-x)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}\end{aligned}$$

b. On en déduit, puisque x et y sont positifs :
$|S(y)-S(x)|=|(y-x)|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}\leqslant |y-x|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ et donc, d'après I-5°-b) :

$$\boxed{|S(y)-S(x)|\leqslant \frac{\pi^2}{6}|y-x|}$$

c. Soit x_0 un réel positif fixé. D'après ce qui précède, pour tout réel positif y :

$$0\leqslant |S(y)-S(x_0)|\leqslant \frac{\pi^2}{6}|y-x_0|$$

or le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorque y tend vers x_0, ainsi, par le théorème d'encadrement des limites : $\lim\limits_{y\to x_0}|S(y)-S(x_0)|=0$ et donc $\lim\limits_{y\to x_0}S(y)=S(x_0)$. C'est la preuve que S est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout x_0 de $\mathbb{R}^+$, on peut en déduire que <u>S est continue sur $\mathbb{R}^+$</u>.

4. a. En reprenant 3°a) : $\forall(x,y)$ de $([0;+\infty[)^2$ $\frac{|S(y)-S(x)|}{|y-x|}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ Donc, puisque toutes les séries en présence sont convergentes :

$$\begin{aligned}\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| &= \left|\sum_{n\geqslant 1}\left[\frac{1}{(n+x)(n+y)}-\frac{1}{(n+x)^2}\right]\right|\\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(n+x)-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)}\right|\\ &\leqslant |y-x|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\\ &\leqslant |y-x|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

(x et y étant positifs).

b. Pour x fixé dans $\mathbb{R}^+$, faisant tendre y vers x dans le membre de droite de l'inégalité précédente, le théorème d'encadrement des limites permet d'affirmer que :
$\lim\limits_{y\to x}\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right|=0$ et donc $\lim\limits_{y\to x}\frac{S(y)-S(x)}{y-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$. C'est la preuve que la fonction S est dérivable en tout x de $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\boxed{S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}}$$

c. En remplaçant dans l'égalité précédente x par 0, il vient immédiatement, d'après I-5°)b) : $\boxed{S'(0)=\frac{\pi^2}{6}}$. De même, avec $x=1$: $S'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, c'est à dire : $\boxed{S'(1)=\frac{\pi^2}{6}-1}$

5. Clairement, la série donnant $-S"(x)$ est convergente et à terme positifs, donc $S"\leqslant 0$ et donc <u>S est concave</u>. (en notant tout de même que pour être tout à fait en règle avec le programme officiel, il aurait fallu admettre que S soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$)

6. a) Soit $A>1$ la fonction φ est une fonction rationnelle sur $[1;+\infty[$, elle est continue sur $[1,A]$ et l'intégrale $\int_1^A\varphi(t)\,dt$ existe et vaut :
$[\ln(t)-\ln(t+x)]_1^A=\ln(A)-\ln(A+x)-\ln 1+\ln(1+x)=\ln\left(\frac{A}{A+x}\right)+\ln(1+x)$
or $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A}{A+x}=1$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\left(\frac{A}{A+x}\right)=0$, ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\varphi(t)\,dt$ <u>existe</u> et vaut $\ln(1+x)$:

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\ln(1+x)}$$

b) Si $t\geqslant 1$ $\varphi'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+x)^2}<0$. Donc φ est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[n;n+1]$, $\varphi(n+1)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(n)$. On peut alors intégrer cet encadrement sur [n,n+1], les bornes étant "dans le bon sens" :
$\varphi(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\varphi(n)$, et pour $N\in\mathbb{N}^*$, sommons cet encadrement pour n variant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n+1)\leqslant\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$$

c'est à dire, par la "relation de Chasles" :

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n+1)\leqslant\int_1^{N+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$$

d'où :

$$\sum_{n=2}^{N+1}\varphi(n)\leqslant\int_1^{N+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$$

Les trois membres de cet encadrement convergent lorsque N tend vers $+\infty$ donc :

$$S(x)-\varphi(1)\leqslant\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt\leqslant S(x)$$

ou encore :

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt\leqslant S(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt}$$

(car $\varphi(1)=1-\frac{1}{1+x}\leqslant 1$)

c) En utilisant le résultat de 6°)a) :

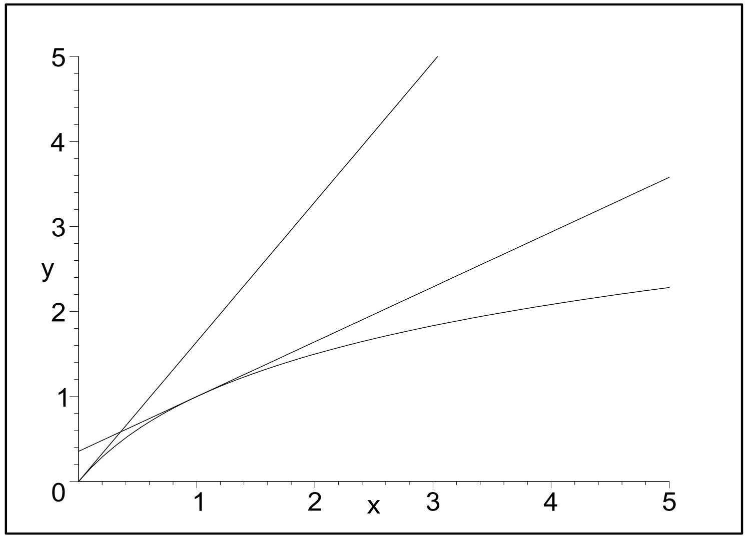
$$\ln(1+x)\leqslant S(x)\leqslant 1+\ln(1+x)$$

d'où, pour $x > 1$:
$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \leqslant \frac{S(x)}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \qquad (1)$$
Notons que, pour $x > 0$, $\ln(1+x) = \ln\left[x(1+\frac{1}{x})\right] = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x})$ donc $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{\ln x}\ln(1+\frac{1}{x})$; De la il vient immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, l'encadrement (1) et le théorème d'encadrement des limites prouvent que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = 1$ et donc que
$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x}$$

7. a) D'après le résultat de la question II.4.b, on voit que S' est une série convergente à termes positifs donc $S' \geqslant 0$; d'autre part, l'équivalent donné à la question précédente prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$, d'où un tableau des variations de S :

x	0		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) On a vu que $S'(0) = \frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $S'(0)$ est assez proche de $1,5$. $S(1) = 1$ et $S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1$ c'est à dire que $S'(1)$ est proche de $0,5$; on en déduit l'allure d'une courbe représentative de S avec la tangente à l'origine et la tangente au point d'abscisse 1 :



Voie économique

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a. Montrer, pour tout entier naturel n :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

b. Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

c. Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

5.a. Soit $w = (1, 0, 0)$.
Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

c. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ converge, et calculer cette intégrale.
On distinguera les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.

4. Déterminer un réel positif α tel que $\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

5. Soit $x \in [0\,; +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0\,; +\infty[$ par : $\forall u \in [0\,; +\infty[,\quad \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt.$

a. Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

b. Montrer : $\forall (u, v) \in \left([0\,; +\infty[\right)^2,\quad u < v \Longrightarrow \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt.$

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$.

c. On admet que φ_x est continue sur $[0\,; +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0\,; +\infty[$.

On note $U\ :\ [0\,; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0\,; +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, on a : $\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

6.a. Vérifier, pour tout $x \in \left[0\,; \frac{1}{2}\right[$: $\quad U(x) = 1 - x$.

b. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$,
et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

7.a. Montrer que l'application U est continue sur $[0\,; +\infty[$.

b. Étudier la dérivabilité de U sur $[0\,; +\infty[$.

c. Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = U(a_n). \end{cases}$

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \geqslant \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\frac{1}{2}$.

d. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 10^{-6}.$$

Exercice 3

1. Préliminaire :

Soit $x \in]0\,;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :

⋆ pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès ;

⋆ T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer : $\quad \mathrm{E}(S_n) = \dfrac{n}{1-x} \quad$ et $\quad \mathrm{V}(S_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$.

d. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$?

e. En déduire, pour tout $x \in]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0\,;1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1-p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.

b. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

c. Montrer : $\quad P(Y=0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

d. Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $\quad P(Y=n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$,

puis, en utilisant **1.e**,

$$P(Y=n) = \frac{1}{(1+q)^2}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.$$

4/4

Exercice 1

1. Le sous-espace vectoriel E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est engendré par trois vecteurs, donc sa dimension est inférieur ou égal à 3.

Soit α, β et γ trois réels ; on a :

$$\alpha \cdot I + \beta \cdot J + \gamma \cdot K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et il est clair que $\alpha \cdot I + \beta \cdot J + \gamma \cdot K = 0$ implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$; on en déduit que la famille (I, J, K) est une famille libre et par suite, c'est une base de E ; la dimension de E est donc 3.

2. On calcule :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et aussi :

$$K \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On remarque que $J^2 = K$; montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $J^n = 0$.

<u>Initialisation</u> : on a $J^3 = J^2 \cdot J = K \cdot J = 0$

<u>Hérédité</u> : si, pour un entier n quelconque, fixé supérieur ou égal à 3, $J^n = 0$, alors $J^{n+1} = J^n \cdot J = 0 \cdot J = 0$

Il s'ensuit donc que pour tout n supérieur ou égal à 3, $J^n = 0$.

3 a. Les matrices J et K commutent ; il s'ensuit que pour tout entier naturel n, on a :

$$(I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot J^k \cdot I^{n-k}$$

Pour $k \geq 3$, $J^k \cdot I^{n-k} = 0$, donc, pour $n \geq 2$:

$$(I+J)^n = \binom{n}{0} \cdot I + \binom{n}{1} \cdot J + \binom{n}{2} \cdot J^2 = I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot J^2$$

et finalement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 ,

$$(I+J)^n = I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot K$$

Il est clair que cette relation est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 0$.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$(I+J)^n = I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot K$$

b. En remplaçant n par -1 dans $I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot J^2$, en multipliant cette nouvelle expression par $I + J$ et en tenant compte du fait que $J^3 = 0$. on obtient :

$$\left[(I-J) + J^2\right] \cdot (I+J) = I - J^2 + J^2 = I$$

Il en résulte que L est inversible et son inverse est $I - J + J^2$.
Remplaçons maintenant n par $-n$ dans $I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot J^2$; en multipliant cette nouvelle expression par $I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot J^2$ et en tenant compte du fait que $J^3 = J^4 = 0$. on obtient :

$$\left[I - n \cdot J - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot J^2\right] \cdot \left[I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot J^2\right] =$$

$$I + n \cdot J - n \cdot J - n^2 \cdot J^2 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot J^2 - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot J^2 = I$$

Ainsi $L^{-n} = I - n \cdot J - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot J^2$; il en résulte donc que pour tout entier relatif n,

$$L^n = I + n \cdot J + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot K$$

On remarque que pour tout entier relatif n, L^n est un élément de E.

c. Tiens, on dirait un changement de base !
Déterminons la matrice Q de la famille $\left(I, L, L^2\right)$ dans la base (I, J, K) ; on a :

$$L = I + J \quad \text{et} \quad L^2 = I + 2J + K$$

et donc

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, donc elle est inversible et la famille $\left(I, L, L^2\right)$ est bien une base de E. On a :

$$J = -I + L \qquad K = -I - 2J + L^2 = I - 2L + L^2$$

La matrice des coordonnées de L^n dans la base $\left(I, L, L^2\right)$ est donnée par :

$$Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \\ n - n \cdot (n-1) \\ \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \end{bmatrix}$$

On a donc, après réduction :

$$L^n = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} \cdot I - n \cdot (n-2) \cdot L + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot L^2$$

4. Aïe ! On nous demande de calculer les valeurs propres d'une matrice ; les pas-doués en calcul vont devoir rechercher une méthode autre que la méthode de Gauss. Bien que présentement je dispose d'un outil me permettant d'écrire les résultats sans avoir à les calculer moi-même, je me joins à tous ceux qui pensent que moins on fait de calculs, plus on va vite et moins on a de chance de se planter.
Nos expériences des sujets nous ont appris que les questions d'un exercice n'étaient pas indépendantes.

On ne prend donc pas un risque énorme à penser que la matrice A sera semblable à une matrice de E, c'est à dire à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et donc qu'il existe un réel α tel que $(A - \alpha \cdot I)^3 = 0$.

Un coup d'oeil sur la question suivante nous montre qu'il est demandé de calculer $(f - e)(w)$; ce qui nous fait dire que la valeur propre en question pourrait très bien être 1.

A ce niveau de reflexion, on est à peu près convaincu que $(A - I)^3 = 0$. Vérifions-le :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le reste est routine ; le polynôme $P(X) = (X - 1)^3$ est un polynôme annulateur de A, donc A (ou f) a au plus une valeur propre : $\lambda = 1$.

On notera que 1 est bien valeur propre de f puisque si la matrice $A - I$ était inversible, il en serait de même de la matrice $(A - I)^3 = 0$.

Donc f a une seule valeur propre, $\lambda = 1$. Si f était diagonalisable, sa matrice serait semblable à la matrice I ; il existerait une matrice inversible P telle que $A = P \cdot I \cdot P^{-1} = I$, ce qui est faux de toute évidence ; on peut donc en conclure que f n'est pas diagonalisable.

5 a. La matrice des coordonnées de $v = (f - e)(w)$ dans la base cannonique est :

$$(A - I) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les plus habiles auront justifié sans calcul que c'est la première colonne de $A - I$ (comment ?)

La matrice des coordonnées de $u = (f - e)(v)$ dans la base cannonique est :

$$(A - I) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la matrice de cette famille est inversible ; or, cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit qu'en permutant la première et la dernière colonne, on obtient *presque* une matrice triangulaire ; cette nouvelle matrice est la matrice de la famille (w, v, u) ; elle est inversible si, et seulement si, la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Or la matrice de (w, v, u) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Une réduite de Gauss P' pour P s'obtient en remplaçant la troisième ligne par la troisième moins deux fois la seconde, soit

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cette matrice est triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, donc P est inversible et (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminons d'abord la matrice de $f - e$ dans la base (u, v, w). On a

$$(f - e)(u) = (f - e)^2(v) = (f - e)^3(w) = 0$$

puisque la matrice de $(f - e)^3$ est la matrice $(A - I)^3 = 0$.

$$(f - e)(v) = u \qquad (f - e)(w) = v$$

En désignant (provisoirement) par M la matrice de f dans la base (u, v, w), on a :

$$M - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$M = I + J$$

On a ainsi, sans surprise, $M = L$. Je dis bien "sans surprise," car quel aurait été l'intérêt de la question 3. si le résultat avait été différent ?

c. Il existe une base dans laquelle la matrice de f est la matrice L inversible ; donc f est un automorphisme de R3.

On a montré que

$$L^n = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}\cdot I - n\cdot(n-2)\cdot L + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot L^2$$

on en déduit donc que :

$$f^n = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}\cdot e - n\cdot(n-2)\cdot f + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot f^2$$

ce qui achève cet exercice.

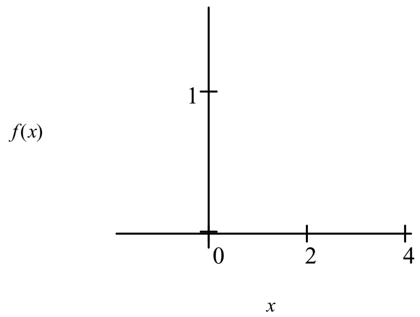
Exercice 2

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \le 0 \\ \dfrac{1}{(t+1)^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

la fonction f est constante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, \infty[$.

On a la représentation graphique suivante :



2. La fonction f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement positive, comme inverse d'une fonction strictement positive sur $]0, \infty[$.

La fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $]0, \infty[$ comme fonction continue de référence . Elle admet donc (au plus) un point de discontinuité .

Reste à montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$$

converge et est égal à 1. Remarquons d'abord que f est une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$; donc, pour tous réels a et b,

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

existe.

En particulier, la fonction f étant nulle sur $]-\infty, 0]$, pour tout réel négatif a ,

$$\int_a^0 f(t)\, dt = 0$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\, dt = 0$$

Pour tout réel b strictement positif,

$$\int_0^b f(t)\, dt = \int_0^b \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = \frac{-1}{(b+1)} + 1$$

Cette intégrale a une limite égale à 1 quand b tend vers $+\infty$. On peut donc écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

Conclusion : la fonction f est une densité de probabilité.

3. On y a déjà répondu dans la question précèdente. Reprenons :

la fonction f étant nulle sur $]-\infty, 0]$, pour tout réel x négatif ou nul,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

Pour tout réel x strictement positif,

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \frac{-1}{(x+1)} + 1$$

On en déduit donc que pour tout réel strictement positif,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{-1}{(x+1)} + 1$$

On remarquera que cette expression est valable pour $x = 0$. Au fait, si f désigne une densité d'une variable aléatoire X, que représente la fonction

$$x \to \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad ?$$

4. Il est clair, d'après la question précédente que le réel α est nécessairement positif.
Résoudre l'équation

$$\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

revient à résoudre l'équation

$$\frac{-1}{(\alpha+1)} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{(\alpha+1)} = \frac{1}{2}$$

et donc $\alpha = 1$.

5 Pour tout réel x positif ou nul, on note φ_x la fonction définie sur $[0, \infty[$ par :

$$\varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt$$

a. On a

$$\varphi_x(0) = \int_{x}^{x} f(t)\,dt$$

La fonction f étant continue par morceaux sur $[0, \infty[$, il s'ensuit que $\varphi_x(0) = 0$.

On a, pour tout réel positif x,

$$\lim_{u \to \infty} \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$$

Il en résulte que φ_x a une limite en $+\infty$, et $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi_x(u) = 1$

b. Puisque $u < v$ on a, pour tout réel positif x, la relation $x - v < x - u < x + u < x + v$
On obtient, en utilisant la relation de Chasles

$$\int_{x-v}^{x+v} f(t)\,dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt = \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,dt + \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt$$

Et après réduction

$$\int_{x-v}^{x+v} f(t)\,dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt = \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt$$

Il en résulte qu'on a l'implication :

$$\forall (u, v) \in ([0, \infty[)^2, \quad u < v \Rightarrow \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt$$

Désignons par F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Comme $0 \leq x + u < x + v$, on a, en utilisant la question 3. et en réduisant :

$$\varphi_{x}\cdot(v) - \varphi_{x}\cdot(u) = F(x+v) - F(x+u) = \frac{-1}{x+v+1} - \frac{-1}{x+u+1}$$

C'est-à-dire :

$$\varphi_{x}\cdot(v) - \varphi_{x}\cdot(u) = \frac{(-u+v)}{(x+v+1)\cdot(x+u+1)} > 0$$

L'application φ_x est donc strictement croissante sur $[0, \infty[$.

c. Pourquoi nous faire admettre la continuité de φ_x sur son ensemble de définition. On peut fort bien la démontrer. Pour tout réel u, on a :

$$\varphi_x(u) = F(x+u) - F(x-u)$$

La fonction F est continue comme fonction de répartition d'une variable à densité ; donc φ_x est continue sur son ensemble de définition comme différence de composition de fonctions continues.
La fonction φ_x est continue sur $[\,0,\infty\,[$ et elle y est strictement monotone (strictement croissante) ; donc elle réalise une bijection de $[\,0,\infty\,[$ sur $[\,\varphi_x(0),\ \lim_{u\to\infty}\varphi_x(u)\,[$, c'est-à-dire sur $[\,0,1\,[$. Or le réel $\frac{1}{2}$ appartient à $[\,0,1\,[$, donc l'équation $\varphi_x(u)=\frac{1}{2}$ admet bien une unique solution, notée $U(x)$, dans $[\,0,\infty\,[$.

Il y a, à ce niveau, une regretable erreur d'énoncé que nous déplorons : il fallait lire "… $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u)=\frac{1}{2}$ " et non "… $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u)=0$ "

6 a. On vérifie en remplaçant $U(x)$ par $1-x$:

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \int_{2x-1}^{1} f(t)\,dt$$

Par hypothèse, $x<\frac{1}{2}$, donc $2\cdot x-1<0$ et la fonction f étant nulle sur $]-\infty,0\,]$,

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \int_{2x-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

D'après la question 4., cette intégrale est égale à $\frac{1}{2}$.

b. Dans cette question, $x\ge\frac{1}{2}$. On a $2\cdot x\ge 1$ et donc, par positivité de l'intégrale,

$$\varphi_x(x) = \int_{0}^{2x} f(t)\,dt \ge \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

C'est-à-dire $\varphi_x(x)\ge\frac{1}{2}$.

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\varphi_x(x)\ge\varphi_x(U(x))$$

La croissance de la fonction φ_x sur son ensemble de définition implique que $x\ge U(x)$, ce qui peut aussi s'écrire $x-U(x)\ge 0$.
Déterminons alors l'expression de $U(x)$. On a :

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = F(x+U(x)) - F(x-U(x))$$

La positivité de $x-U(x)$ et celle de $x+U(x)$ nous donne :

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \frac{-1}{x+U(x)+1} - \frac{-1}{x-U(x)+1}$$

ce qui se réduit en

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \frac{2\cdot U(x)}{(x+1)^2-(U(x))^2}$$

L'équation

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

s'écrit alors :

$$\frac{2\cdot U(x)}{(x+1)^2-(U(x))^2} = \frac{1}{2}$$

On transpose :

$$(U(x))^2 + 4\cdot U(x) = (x+1)^2$$

Ayons l'idée de rajouter 4 aux deux membres de l'égalité :

$$(U(x))^2 + 4\cdot U(x) + 4 = (x+1)^2 + 4$$

soit :

$$(U(x)+2)^2 = 4 + (x+1)^2$$

Comme $U(x)\ge 0$, on en déduit que $U(x)+2\ge 0$ et donc :

$$\sqrt{4+(x+1)^2} = |U(x)+2| = U(x)+2$$

Ainsi,

$$U(x) = \sqrt{4+(x+1)^2} - 2$$

7 a. La fonction U définie sur $[\,0,\infty\,[$ s'écrit :

$$U(x) := \begin{cases} 1-x \quad if \quad 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{4+(x+1)^2}-2 \quad if \quad x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Elle est continue sur $[\,0,\frac{1}{2}\,[$ comme fonction affine et sur $[\frac{1}{2},\infty\,[$ comme différence de la racine carrée d'une fonction polynôme positive $x \to 4+(x+1)^2$ et de la constante 2.

En ce qui concerne la continuité en $\frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} U(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} (1-x) = \frac{1}{2}$$

et aussi :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} U(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \left[\sqrt{4+(1+x)^2}-2\right] = \sqrt{4+\frac{9}{4}}-2 = \frac{5}{2}-2 = \frac{1}{2}$$

On a :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} U(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} U(x) = U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

donc U est aussi continue en $\frac{1}{2}$, et par suite, U est continue sur son ensemble de définition.

b. La fonction f est dérivable sur $[\,0,\frac{1}{2}\,[$ comme fonction affine et sur $]\frac{1}{2},\infty\,[$ comme différence de la racine carrée de la fonction polynôme strictement positive $x \to 4+(x+1)^2$ et de la constante 2.

Etudions la dérivabilité de la fonction U en $\frac{1}{2}$. D'abord

$$\frac{U(x)-U\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \frac{(1-x)-\left(1-\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = -1$$

Donc la fonction U est dérivable en $\frac{1}{2}$ à gauche et sa dérivée vaut -1. Notons, maintenant, que sur $[\frac{1}{2},\infty\,[$, la fonction U est, à une constante près, la racine carrée d'une fonction (positive) croissante ; elle est donc croissante et sa dérivée en $\frac{1}{2}$, si elle existe, ne peut-être que positive, et donc différente de -1. Il s'ensuit que la fonction U n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ et par suite, elle est dérivable uniquement sur chacun des intervalles $[\,0,\frac{1}{2}\,[$ et $]\frac{1}{2},\infty\,[$.

c. Déterminons la limite en $+\infty$ de $U(x)-(x-1)$; on a, après réduction :

$$U(x)-(x-1) = \sqrt{4+(x+1)^2}-(x+1)$$

Soit,

$$U(x)-(x-1) = \frac{4+(x+1)^2-(x+1)^2}{\sqrt{4+(x+1)^2}+(x+1)} = \frac{4}{\left[\sqrt{4+(x+1)^2}+(x+1)\right]}$$

Comme, de façon évidente,

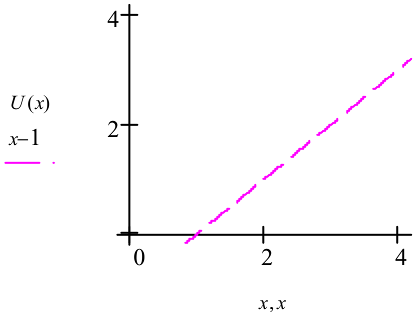
$$\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{4+(x+1)^2}+(x+1)\right] = \infty$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} [U(x)-(x-1)] = 0$$

et donc la droite d'équation $y = x-1$ est bien asymptôte à la courbe de U.

d. Traçons la courbe en trait plein et son asymptôte en pointillés



8. La fonction U est décroissante sur $[\,0\,,\frac{1}{2}\,[$ et croissante sur $[\,\frac{1}{2}\,,\infty\,[$; donc elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum vaut $U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_n \geq \frac{1}{2}$

On a $a_0 = 1 \geq \frac{1}{2}$

Supposons que pour un entier naturel n quelconque fixé, $a_n \geq \frac{1}{2}$; alors, d'après ce qui vient d'être dit,

$$a_{n+1} = U(a_n) \geq \frac{1}{2}$$

Il en résulte que pour tout entier naturel n, $a_n \geq \frac{1}{2}$.

b. Montrons que pour tout entier naturel n, $a_n \geq a_{n+1}$. D'après la question 6.b , pour tout $x \geq \frac{1}{2}$, $U(x) \leq x$. On a montré que pour tout entier naturel n, $a_n \geq \frac{1}{2}$, on en déduit donc que $a_{n+1} = U(a_n) \leq a_n$. Donc la suite (a_n) est décroissante.

c. La suite (a_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$; on en déduit donc que la suite (a_n) est convergente de limite l supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Plus précisément :

☞ la suite (a_n) est définie par une relation de récurrence $a_{n+1} = U(a_n)$;

☞ pour tout entier naturel n, $a_n \in [\,\frac{1}{2}\,,\infty\,[$;

☞ la suite (a_n) est convergente de limite l supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$;

☞ la fonction U est continue sur $[\,0\,,\infty\,[$ donc en l ;

On en déduit que l est solution de l'équation $U(x) = x$

D'abord, dans la question 5.b , la relation

$$0 \leq x+u < x+v \Rightarrow F(x+v) - F(x+u) > 0$$

implique que la fonction F est strictement croissante sur $[\,0\,,\infty\,[$. Ensuite, dans la question 6.b , on voit que si $x > \frac{1}{2}$, $2\cdot x > 1$ et donc

$$\varphi_x(x) = \int_0^{2\cdot x} f(t)\,dt = F(2\cdot x) > F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\varphi_x(x) > \varphi_x(U(x))$$

La croissance stricte de la fonction φ_x sur $]\,\frac{1}{2}\,,\infty\,[$ implique que $x > U(x)$. L'équation $U(x) = x$ n'admet donc aucune solution sur $]\,\frac{1}{2}\,,\infty\,[$; comme, par ailleurs, $U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit que la limite de (a_n) est $\frac{1}{2}$.

d. La convergence de la suite (a_n) de limite $\frac{1}{2}$ nous montre qu'il existe un entier naturel N à partir duquel la distance de tous les termes à $\frac{1}{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-6}.

On notera que la décroissance de la suite, implique que le plus petit entier naturel n vérifiant la relation

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leq 10^{-6}$$

est aussi le plus petit entier naturel *à partir duquel* la relation ci-dessus est vérifiée.
Dans le programme joint ci-dessous, on a noté x les valeurs successives de a_n en l'initialisant à a_0 et d le réel $\left|a_n - \frac{1}{2}\right|$.

Comme, pour tout entier naturel n, $a_n \geq \frac{1}{2}$, on peut restreindre la fonction U à l'intervalle $[\frac{1}{2}, \infty[$.

En " faisant tourner " ce programme , on obtient la valeur : $n = 26$

```
Program lyon_2005;

var
x,d         : real;
n           : integer;


function U(x:real):real;
begin
        U:=sqrt(4+(x+1)*(x+1))-2;
end;


Begin
n:=0; x:=1; d:=1;
while d>1E-6 do
        begin
                x:=U(x);
                d:=abs(U(x)-1/2);
                n:=n+1;
        end;
writeln('n=',n);
End.
```

Exercice 3

1 a. Pour $n = 1$, la variable T_1 est le temps d'attente du premier succès et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, T_n est le temps d'attente du premier succès après le $(n-1)^{\text{ème}}$. Il s'ensuit que pour tout entier naturel n non nul, T_n suit une loi géométrique de paramètre $1 - x$. Ainsi, pour tout entier naturel k non nul,

$$p\left(T_n = k\right) = x^{k-1}\cdot(1-x)$$

D'après le cours, on a immédiatement pour tout entier naturel non nul n :

$$E\left(T_n\right) = \frac{1}{1-x} \qquad V\left(T_n\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

b. Désignons par A_k l'événement :"obtenir un succès à la $k$ème épreuve. Pour toute famille d'entiers naturels strictement positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n$, on a :

$$\left(T_1 = i_1\right) \cap \left(T_2 = i_2\right) \cap \ldots \cap \left(T_n = i_n\right) = \bigcap_{j=0}^{n-1}\left(\overline{A}_{i_j+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_{j+1}-1} \cap A_{i_{j+1}}\right)$$

avec, pour convention, $i_0 = 0$. L'indépendance des événements événements A_k permet d'écrire :

$$p\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left(T_j = i_j\right)\right) = \prod_{j=0}^{n-1}\left[p\left(\overline{A}_{i_j+1}\right)\cdots p\left(\overline{A}_{i_{j+1}-1}\right)p\left(A_{i_{j+1}}\right)\right]$$

soit :

$$p\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left(T_j = i_j\right)\right) = \prod_{j=0}^{n-1} p\left(\overline{A}_{i_j+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_{j+1}-1} \cap A_{i_{j+1}}\right)$$

c'est-à-dire :

$$p\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left(T_j = i_j\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} p\left(T_j = i_j\right)$$

Il s'ensuit que les variables T_i sont indépendantes.

c. On a $S_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$; donc ,

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = \frac{n}{1-x}$$

Les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ étant indépendantes (deux à deux), on a :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = \frac{n \cdot x}{(1-x)^2}$$

d. D'abord l'événement $(S_n = k)$ est impossible si $k < n$, car il ne peut y avoir plus de succès que d'épreuves.

Pour $k \geq n$, l'événement $(S_n = k)$ est l'ensemble des k-listes dans lesquelles le dernier élément est un succès, et où les $k-1$ autres succès sont répartis dans les $n-1$ places restantes.

Il y a $\begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ façons de choisir l'emplacement des $n-1$ premiers succès parmi les $k-1$ premieres places ; chacun des n succès a une probabilité de $1-x$, et chacun des $n-k$ échecs, une probabilité de x ; donc

$$\begin{cases} p(S_n = k) = 0 & \text{si } k < n \\ p(S_n = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \cdot x^{k-n} \cdot (1-x)^n & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

Si $j \neq k$, les événements $(S_n = j)$ et $(S_n = k)$ sont incompatibles ; il en résulte que

$$\sum_{k=n}^{\infty} p(S_n = k) = p\left(\bigcup_{k \geq n} (S_n = k)\right)$$

ou encore ,

$$\sum_{k=n}^{\infty} p(S_n = k) = p(S_n \geq n)$$

Comme l'univers de S_n est l'ensemble des entiers supérieur ou égal à n, il s'ensuit que

$$\sum_{k=n}^{\infty} p(S_n = k) = 1$$

e. On vient d'établir que :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \cdot x^{k-n} \cdot (1-x)^n = 1$$

On a donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \cdot x^k \cdot \frac{(1-x)^n}{x^n} = 1$$

puis en factorisant et en transposant :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \cdot x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2 a. X désigne le temps d'attente du premier pile dans une succession d'épreuves indépendantes se déroulant toujours dans les mêmes conditions. On reconnaît bien là une loi géométrique, et pour tout entier naturel k non nul ,

$$p(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1}$$

" Y sachant $(X = k)$" désigne le nombre de piles obtenu au cours des k lancers successifs se déroulant toujours dans les mêmes conditions. On reconnaît ici une loi binomiale de paramètres k, p ; pour tout entier naturel n inférieur ou égal à k,

$$p_{(X=k)}(Y = n) = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \cdot p^n \cdot (1-p)^{k-n} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \cdot p^n \cdot q^{k-n}$$

b. Soit n un entier naturel quelconque ; l'événement "$(Y = n)$ sachant $(X = n+1)$" est une réalisation possible (de probabilité non nulle) de l'événement $(Y = n)$; donc l'univers de Y est $\mathbb{N}$.

c. La famille $(X = k)_{k \geq 1}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales

$$p(Y = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(X=k)}(Y = 0) \cdot p(X = k)$$

d'où :

$$p(Y = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot p \cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{2k-1}$$

On obtient immédiatement :

$$p(Y = 0) = \frac{p}{q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^2\right)^k = \frac{p}{q} \cdot q^2 \cdot \frac{1}{1 - q^2}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$p(Y = 0) = \frac{p \cdot q}{(1 - q) \cdot (1 + q)} = \frac{q}{1 + q}$$

car $p = 1 - q$.

d. La famille $(X = k)_{k \geq 1}$ est un système complet d'événements, et $p_{(X=k)} \cdot (Y = n) = 0$ pour tout entier n supérieur à k (il est en effet impossible d'obtenir plus de piles que de lancers). Il s'ensuit que

$$p(Y = n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_{(X=k)}(Y = n) \cdot p(X = k)$$

c'est à dire, en utilisant la question 2.a ci-dessus,

$$p(Y = n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot p^n \cdot q^{k-n} \cdot \left(p \cdot q^{k-1}\right)$$

et donc en réduisant :

$$p(Y = n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot p^{n+1} \cdot q^{2 \cdot k - n - 1}$$

Faisons maintenant un bref retour à la question 1.e, juste le temps de changer les notations. L'identité

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} \cdot x^k = \frac{x^n}{(1 - x)^n}$$

peut aussi s'écrire, en remplaçant $n - 1$ par n et $k - 1$ par k :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot x^{k+1} = \frac{x^{n+1}}{(1 - x)^{n+1}}$$

ou encore, en simplifiant pour x non nul

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot x^k = \frac{x^n}{(1 - x)^{n+1}} \qquad (*)$$

(on notera que cette relation est encore vraie pour $x = 0$, mais comme nous le verrons, cela n'intervient pas ici).

Maintenant on peut finir :

$$p(Y = n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot p^{n+1} \cdot q^{2 \cdot k - n - 1} = \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot \left(q^2\right)^k$$

En utilisant (*) avec $x = q^2$ (non nul) :

$$p(Y = n) = \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^{2n}}{\left(1 - q^2\right)^{n+1}} = \frac{p^{n+1} \cdot q^{n-1}}{(1 + q)^{n+1} \cdot (1 - q)^{n+1}}$$

Si vous n'avez pas oublié que $1 - q = p$, vous simplifiez et obtenez finalement :

$$p(Y = n) = \frac{q^{n-1}}{(1 + q)^{n+1}} = \frac{1}{(1 + q)^2} \cdot \left(\frac{q}{1 + q}\right)^{n-1}$$

ce qui achève cet exercice.