Mathématiques
Voies S et E

Corrigés des épreuves ESSEC 2005 Maths I S et Maths II E

Alain Combrouze
Professeur de mathématiques en classes préparatoires scientifiques, lycée Saint-Louis (Paris) et économiques et commerciales, Prépasup (Paris).

Voie scientifique

BCE
BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.
Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.
On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note x_i sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x, y\rangle = {}^t xy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
À f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$, et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x, y\rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.
Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y(x), x \in U)$.

PARTIE I

Dans cette partie, $n=1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x)=xy-f(x)$.

1) Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f^* est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Quelques exemples.
   Après avoir étudié les variations de F_y, préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :

   a) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=a\dfrac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.

   b) $U=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.

   (on pourra introduire le réel β vérifiant : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$).

   c) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.
3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?
4) Plus généralement, on suppose que : $U=\mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x)>0$.
   a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note g l'application réciproque de f'.
   b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y, montrer que $U(f)=\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f^*(x)=xg(x)-f(g(x))$.
   Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g.
   c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x\mapsto xy-f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^*=f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

1) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\|x\|$.
   a) Pour t réel strictement positif et $y\in\mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim\limits_{t\to+\infty}F_y(ty)$.
   Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y\in\mathbb{R}^n, \|y\|\le 1\}$?
   b) Lorsque $\|y\|\le 1$, montrer que : $F_y(x)\le F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^*.
   c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
On rappelle que : $\forall x,x'\in\mathbb{R}^n$ $\langle x, Ax'\rangle=\langle x', Ax\rangle$.

2) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.

   Pour $y\in\mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x)=\langle x,y\rangle-\dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.
   a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :
   $\lambda\|x\|^2\le\langle x, Ax\rangle\le\mu\|x\|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A.
   b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h)-F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah\rangle$ et $\langle h, y-Ax\rangle$ et établir que : $F_y(x+h)-F_y(x)\le\langle h, y-Ax\rangle$.
   c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour : $x=A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.
3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$ mais dans cette question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.
   On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant :

   pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ $F_y(x)=\langle x,y\rangle-\dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.
   a) Existence d'un maximum.
   - Montrer que : $\forall y\in\mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}F_y(x)=-\infty$ et en déduire que pour $x_0\in U$:
     il existe r strictement positif vérifiant $(\|x\|>r\Rightarrow F_y(x)<F_y(x_0))$.
   - Établir que l'ensemble $U_0=U\cap\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|\le r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que : $U(f)=\mathbb{R}^n$.

   b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.
   - Pour x et x' deux vecteurs de U et $y\in\mathbb{R}^n$, établir la relation :
     $F_y(\dfrac{x+x'}{2})-\dfrac{F_y(x)}{2}-\dfrac{F_y(x')}{2}=\dfrac{\langle x-x', A(x-x')\rangle}{8}$.
   - En supposant que $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y,
     montrer que : $f^*(y)<F_y(\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{x}'))$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.
On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $Bx=c$.
On note $\mathrm{Im}\,M$ et $\ker M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n.
On suppose que $c\in\mathrm{Im}\,B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier).
D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\bar{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y.
L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\bar{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de $\overline{x}$.

a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$ $\langle x, Bx'\rangle = \langle {}^tBx, x'\rangle$.

Montrer que : $\mathrm{Im}\,{}^tB \subset (\ker B)^{\perp}$ en désignant par $(\ker B)^{\perp}$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\mathrm{Im}\,{}^tB$ et de $(\ker B)^{\perp}$ et en déduire que :

$\mathrm{Im}\,{}^tB = (\ker B)^{\perp}$. (On admettra que : $rg(B) = rg({}^tB)$).

b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\overline{x}+th) - F_y(\overline{x}) = t\langle y - A\overline{x}, h\rangle - t^2\frac{\langle h, Ah\rangle}{2}.$$

En déduire que $\overline{x}$ est caractérisé par l'existence de $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\overline{x} = c$ et $y - A\overline{x} = {}^tB\overline{z}$.

2) Un algorithme de recherche de $\overline{x}$.

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$\forall p \in \mathbb{N}\quad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations : $A(x_p - \overline{x}) = {}^tB(\overline{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} + rB(x_p - \overline{x})$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\| z_{p+1} - \overline{z}\|^2 = \| z_p - \overline{z}\|^2 - 2r\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle + r^2\| B(x_p - \overline{x})\|^2.$$

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\| BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x\rangle$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.
- Établir que la matrice $A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\| Bx\|^2 \le \alpha\langle x, Ax\rangle$.

d) On choisit $r \in \left]0, \frac{2}{\alpha}\right[$.

Montrer que : $\| z_{p+1} - \overline{z}\|^2 - \| z_p - \overline{z}\|^2 \le r(r\alpha - 2)\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle \le 0$.

En déduire que la suite $(\| z_p - \overline{z}\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\overline{x}$.

***

1) $F_y : x \mapsto x.y - f(x)$ est continue sur le segment U, donc bornée sur U, et admet un maximum (et un minimum) sur U quelque soit y réel.

$\boxed{f^* \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}}$

2) a) Soient $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = a.\frac{x^2}{2}$, où $a > 0$.

$F_y(x) = x.y - a.\frac{x^2}{2}$, et $F'_y(x) = y - a.x$.

D'où les variations de F_y.

x	$-\infty$		$\frac{y}{a}$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	$-\infty$	↗	$F_y(\frac{y}{a})$	↘	$-\infty$

F_y admet un maximum égal à $F_y(\frac{y}{a}) = \frac{y^2}{a} - a.\frac{y^2}{2.a^2} = \frac{y^2}{2.a}$.

$\boxed{\text{Lorsque } f : x \mapsto a.\frac{x^2}{2} \text{ et } U = \mathbb{R}, \text{ on a : } U(f) = \mathbb{R}, \text{ et } f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2.a}}$

2) b) Supposons maintenant que $U = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \frac{x^\alpha}{\alpha}$, où $\alpha > 1$.

$F_y : x \mapsto x.y - \frac{x^\alpha}{\alpha}$, et $F'_y(x) = y - x^{\alpha-1}$.

D'où la discussion.

<u>1er cas : $y \le 0$.</u>

x	0		$+\infty$
$F_y(x)$		$-$	
F_y	0	↘	$-\infty$

F_y n'admet pas de maximum sur $U = \mathbb{R}_+^*$.

<u>2ème cas : $y > 0$.</u>

$F'_y(x) = 0$ si $x^{\alpha-1} = y$, soit : $x = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

D'où le tableau de variation de F_y.

x	0		$y^{\frac{1}{\alpha-1}}$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$		$-$	
F_y	0	↗	$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}})$	↘	$-\infty$

F_y *admet un maximum égal à :*

$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = y.y^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}.(y^{\frac{1}{\alpha-1}})^{\alpha} = y^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}.y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (1-\frac{1}{\alpha}).y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}.y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$

Introduisons le réel β *défini par :* $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$*, c'est-à-dire :* $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Le maximum précédent de F_y *vaut :* $F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = \frac{1}{\beta}.y^{\beta}$ *Dans ce cas, il vient :* $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$.

$\boxed{\text{Lorsque } U = \mathbb{R}_+^* \text{ et } f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}\text{, on obtient : } U(f) = \mathbb{R}_+^* \text{ et } f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta} \text{ pour } y > 0}$

2) c) Supposons que $U = \mathbb{R}$ *et* $f(x) = e^x$.

$F_y(x) = x.y - e^x$, et : $F_y'(x) = y - e^x$.

<u>1er cas : $y \leq 0$.</u>

Les variations de F_y *sont les suivantes.*

x	$-\infty$		$+\infty$
$F_y'(x)$		$-$	
F_y		$\searrow$	$-\infty$

F_y *n'admet pas de maximum sur* $U = \mathbb{R}$.

<u>2ème cas : $y > 0$.</u>

$F_y'(x) = 0$ *si* $e^x = y$*, soit :* $x = \ln(y)$ *On obtient les variations suivantes.*

x	$-\infty$		$\ln(y)$		$+\infty$
$F_y'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	$-\infty$	$\nearrow$	$F_y(\ln(y))$	$\searrow$	$-\infty$

F_y *admet pour maximum* $F_y(\ln(y)) = y.\ln(y) - e^{\ln(y)} = y.\ln(y) - y = y.(\ln(y)-1)$.

$\boxed{\text{Lorsque } U = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = e^x\text{, on obtient } U(f) = \mathbb{R}_+^*\text{, et } f^*(y) = y.\ln(y) - y \text{ pour } y > 0}$

3) a) Supposons que $U = \mathbb{R}$ *et* $f(x) = a.\frac{x^2}{2}$*, où* $a > 0$.

On a obtenu : $U(f) = \mathbb{R}$*, et* $f^* :\ y \mapsto \frac{y^2}{2.a}$*, de sorte que l'étude de* $(f^*)^*$ *nous ramène à celle de* f^* *en changeant* a *en* $\frac{1}{a}$.

$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^2}{2.\frac{1}{a}} = a.\frac{y^2}{2},\ y \in \mathbb{R}}$

3) b) Supposons que $U = \mathbb{R}_+^*$ *et* $f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}$.

On a obtenu : $U(f) = \mathbb{R}_+^*$ *et* $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$*, où le réel* β *est défini par la relation :* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Il vient $\beta > 1$ *et l'étude de* f^* *peut se ramener, là encore, à celle de* f*, en remplaçant le paramètre* α *par* β *et en notant que le réel associé à* β *par la relation* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ *n'est autre que* α.

$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R}_+^* \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^{\alpha}}{\alpha}}$

3) c) Supposons que $U = \mathbb{R}$ *et* $f(x) = e^x$.

On a trouvé : $U(f) = \mathbb{R}_+^*$ *et* $f^*(x) = x.\ln(x) - x$*, pour* $x > 0$.

Posons $F_y^*(x) = x.y - f^*(x) = x.y - x.\ln(x) + x = x.(y+1) - x.\ln(x)$.

$(F_y^*)'(x) = y + 1 - 1 - \ln(x)$. $(F_y^*)'(x) = 0$ *si* $\ln(x) = y$*, soit si* $x = e^y$.

D'où les variations de F_y^*.

x	0		e^y		$+\infty$
$(F_y^*)'(x)$		$+$		$-$	
F_y^*	0	$\nearrow$	$F_y^*(e^y)$	$\searrow$	$-\infty$

F_y^* *admet un maximum égal à* $F_y^*(e^y) = e^y.(y+1) - e^y.\ln(e^y) = e^y$.

$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = e^y \text{ pour } y \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{On constate sur les trois exemples précédents que } U(f^*) = U \text{ et que } (f^*)^* = f}$

4) a)

$\boxed{f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}\text{. On conclut que } f' \text{ est une bijection continue et strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}}$

4) b) (i) $F_y(x) = x.y - f(x)$ *et* $F_y'(x) = y - f'(x)$.

$F_y'(x) = 0$ si $x = (f')^{-1}(y)$.

F_y' *étant décroissante, on a* $F_y' > 0$ *sur* $]-\infty, (f')^{-1}(y)[$ *et* $F_y' < 0$ *sur* $](f')^{-1}(y), +\infty[$.

Le tableau de variation de F_y *est le suivant :*

x	$-\infty$		$(f')^{-1}(y)$		$+\infty$
$F_y'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y		$\nearrow$	$F_y((f')^{-1}(y))$	$\searrow$	

F_y *admet un maximum égal à* $F_y((f')^{-1}(y)) = y.(f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y)) = y.g(y) - f(g(y))$.

$\boxed{U(f) = \mathbb{R} \text{ et } f^*(y) = y.g(y) - f(g(y))}$

(ii) f' *est une bijection dérivable de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *dont la dérivée* f'' *n'est nulle en aucun point de* $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque $g = (f')^{-1}$ *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et :* $\forall\, y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \frac{1}{f''(x)}$ *si* $y = f'(x)$.

$y \mapsto f(g(y))$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme composée de fonctions dérivables.*

$\boxed{f^* :\ y \mapsto y.g(y) - f(g(y)) \text{ est aussi dérivable sur } \mathbb{R}}$

(iii) $\forall\, y \in \mathbb{R},\ (f^*)'(y) = g(y) + y.g'(y) - f'(g(y)).g'(y)$.

Comme $g = (f')^{-1}$*, il vient :* $f'(g(y)) = y$*, et* $(f^*)'(y) = g(y)$.

$\boxed{\text{Finalement : } (f^*)' = g}$

4) c) Soit $F_y^*: x \mapsto x.y - (f^*)(x) = x.y - x.g(x) + f(g(x))$, avec $x \in \mathbb{R}$.

$(F_y^*)'(x) = y - g(x) - x.g'(x) + f'(g(x)).g'(x) = y - g(x)$, puisque $f'(g(x)) = x$.

$(F_y^*)'(x) = 0$ si $g(x) = y$, soit $x = g^{-1}(y) = f'(y)$.

$g = (f')^{-1}$ a même sens de variation que f' et est strictement croissante sue $\mathbb{R}$.

$(F_y^*)'$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$, et > 0 sur $]-\infty, f'(y)[$ puis < 0 sur $]f'(y), +\infty[$.

D'où les variations de F_y^*.

x	$-\infty$		$f'(y)$		$+\infty$
$(F_y^*)'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y^*		$\nearrow$	$F_y^*(f'(y))$	$\searrow$	

F_y^* admet donc un maximum égal à $(F_y^*)(f'(y)) = y.f'(y) - (f^*)(f'(y))$.

Soit $(F_y^*)(f'(y)) = y.f'(y) - f'(y).g(f'(y)) + f[g(f'(y))] = y.f'(y) - f'(y).y + f(y) = f(y)$.

$$\boxed{\text{On conclut que : } \forall\, y \in \mathbb{R},\ (f^*)^*(y) = f(y), \text{ donc que } (f^*)^* = f}$$

Partie II

1) a) (i) Soit $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

$F_y(ty) = < y, t.y > - \| t.y \| = t. \| y \|^2 - t. \| y \| = t. \| y \| .(\| y \| - 1)$.

$$\boxed{F_y(ty) = t. \| y \| .(\| y \| - 1)}$$

(ii) **<u>1er cas : $\| y \| > 1$.</u>**

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = +\infty$.

<u>2ème cas : $\| y \| < 1$.</u>

On obtient : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = -\infty$.

<u>3ème cas : $\| y \| = 1$.</u>

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = 0$.

(iii) Si F_y admet un maximum sur $U = \mathbb{R}^n$, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = +\infty$, et donc nécessairement $\| y \| \leq 1$.

$$\boxed{U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \| y \| \leq 1\}}$$

2) b) (i) Supposons $\| y \| \leq 1$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire : $F_y(x) = < x, y > - \| x \| \leq \| x \| . \| y \| - \| x \|$.

Soit : $F_y(x) \leq \| x \| .(\| y \| - 1) \leq 0 = F_y(0)$.

$$\boxed{\text{Si } \| y \| \leq 1, \text{ on a : } F_y(x) \leq F_y(0)}$$

(ii) Lorsque $\| y \| \leq 1$, F_y admet $F_y(0) = 0$ comme maximum, et donc $y \in U(f)$.

Cela se traduit par l'inclusion : $\{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \| y \| \leq 1\} \subset U(f)$.

Compte-tenu de l'inclusion obtenue au 1)a), il vient :

$$\boxed{U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \| y \| \leq 1\}, \text{ et } f^*(y) = F_y(0) = 0 \text{ pour } y \in U(f)}$$

c) Soit $F_y^*: x \mapsto < x, y > - (f^*)(x) = < x, y >$, $x \in U(f)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne à nouveau :

$F_y(x) \leq \| x \| . \| y \| \leq \| y \|$, puisque $x \in U(f^*)$ et $\| x \| \leq 1$.

D'autre part : $F_y^*\left(\frac{y}{\| y \|}\right) = < \frac{y}{\| y \|}, y > = \frac{< y, y >}{\| y \|} = \| y \|$.

On voit que F_y^* admet pour maximum sur $U(f^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \| y \| \leq 1\}$ la valeur $(F_y^*)\left(\frac{y}{\| y \|}\right) = \| y \|$ quel que soit $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{On conclut que : } U(f^*) = \mathbb{R}^n, \text{ et que } (f^*)^*(y) = \| y \| = f(y) \text{ pour } y \in \mathbb{R}^n, \text{ soit } (f^*)^* = f}$$

2) a) Assimilons A à un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, en confondant A et l'endomorphisme que A représente dans la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Cette base canonique est en effet orthonormale pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il existe alors une base orthonormale $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, les valeurs propres respectivement associées à $u_1, u_2, ..., u_n$, en supposant que : $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \mu$.

Soit x, un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Ecrivons : $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k.u_k$. Par linéarité : $A.x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k.A.u_k$.

$< x, A.x > = < \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.u_i, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k.A.u_k > = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i.x_k. < u_i, A.u_k > = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i.x_k. < u_i, \lambda_k.u_k >$.

Soit : $< x, A.x > = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.x_i.x_k. < u_i, u_k >$.

Comme $< u_i, u_k > = 0$ si $i \neq k$ et $< u_i, u_k > = 1$ si $i = k$, il vient :

$< x, A.x > = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2$.

Ensuite, puisque $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \mu$, on obtient :

$\lambda.(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2) \leq < x, A.x > = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2. \leq \mu.(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2)$.

Par ailleurs, la base $(u_1, u_2, ..u_n)$ étant orthonormale : $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \| x \|^2$.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda. \| x \|^2 \leq < x, A.x > \leq \mu. \| x \|^2}$$

2) b) (i) $F_y(x + h) - F_y(x) = < x + h, y > - \frac{< x + h, A.(x + h) >}{2} - < x, y > + \frac{< x, A.x >}{2}$.

La bilinéarité du produit scalaire permet d'écrire :

$F_y(x+h) - F_y(x)$

$= < x,y > + < h,y > - \dfrac{< x,A.x > + < x,A.h > + < h,A.x > + < h,A.h >}{2}$

$\quad - < x,y > + \dfrac{< x,A.x >}{2}$

$= < h,y > - \dfrac{< x,A.h > + < h,A.x > + < h,A.h >}{2}$.

A étant symétrique, il vient : $< x,A.h > = < h,A.x >$.

D'où : $F_y(x+h) - F_y(x) = < h,y > - < h,A.x > - \dfrac{< h,A.h >}{2}$.

$$\boxed{F_y(x+h) - F_y(x) = < h, y - A.x > - \frac{< h,A.h >}{2}}$$

(ii) D'après l'encadrement obtenu au 2)a), on a : $\lambda. \| h \|^2 \leq < h,A.h >$.

Les valeurs propres de A étant strictement positives, on a : $\lambda > 0$, *et donc :* $< h,A.h > \geq 0$.

D'où : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq < h, y - A.x >$.

$$\boxed{\forall\, (x,y,h) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ F_y(x+h) - F_y(x) \leq < h, y - A.x >}$$

2) c) (i) Remarquons d'abord que A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.

Prenons $x = A^{-1}.y$ *dans l'inégalité précédente.*

$A.x = y$, *et* $F_y(A^{-1}.y + h) - F_y(A^{-1}.y) \leq < h, y - y > = 0$.

Soit : $F_y(A^{-1}.y + h) \leq F_y(A^{-1}.y)$.

Soit alors z, un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

En appliquant l'inégalité précédente avec $h = z - A^{-1}.y$, *on obtient :*

$F_y(z) \leq F_y(A^{-1}.y)$.

D'autre part :

$F_y(A^{-1}.y) = < y, A^{-1}.y > - \dfrac{< A^{-1}.y, A.A^{-1}.y >}{2} = < y, A^{-1}.y > - \dfrac{< A^{-1}.y, y >}{2} = \dfrac{< y, A^{-1}.y >}{2}$

$$\boxed{F_y \text{ présente donc un maximum au point } A^{-1}.y, \text{ et ce maximum vaut : } F_y(A^{-1}.y) = \frac{< y, A^{-1}.y >}{2}}$$

(ii)

$$\boxed{\text{On a : } U(f) = \mathbb{R}^n, \text{ et } f^* :\ y \mapsto \frac{< y, A^{-1}.y >}{2}}$$

(iii) On peut ramener l'étude de f^* *à celle de f en remplaçant la matrice A par* A^{-1}.

En effet A^{-1}, *inverse de A, est également symétrique, et ses valeurs propres* $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, .., \dfrac{1}{\lambda_n}$ *sont strictement positives.*

Comme $(A^{-1})^{-1} = A$, *on conclut que :*

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R}^n, \text{ et que : } (f^*)^* :\ y \mapsto \frac{< y, A.y >}{2} = f(y). \text{ Soit : } (f^*)^* = f}$$

• *(i) L'inégalité du 2)a) donne :* $F_y(x) = < x,y > - \dfrac{< x,A.x >}{2} \leq < x,y > - \dfrac{\lambda. \| x \|^2}{2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet ensuite d'écrire : $F_y(x) \leq \| x \| . \| y \| - \dfrac{\lambda}{2}. \| x \|^2$.

Soit : $F_y(x) \leq \| x \| .(\| y \| - \dfrac{\lambda}{2}. \| x \|)$.

Lorsque $\| x \|$ *tend vers* $+\infty$, $\| y \| - \dfrac{\lambda}{2}. \| x \|$ *tend vers* $-\infty$, *car y est fixé et* $\lambda > 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty}$$

(ii) Soit x_0, *un élément fixé de U. La définition de la limite donne alors :*

$$\boxed{\text{Il existe } r > 0 \text{ tel que } \| x \| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0)}$$

• *(i) L'application* $\varphi :\ x \mapsto \| x \|$ *est continue (*φ *est même 1−lipchitzienne d'après l'inégalité :* $\forall\, (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ | \varphi(u) - \varphi(v) | = | \| u \| - \| v \| | \leq \| u - v \|$*).*

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq r\} = \varphi^{-1}(]-\infty, r])$ *est donc un fermé comme image réciproque du fermé* $]-\infty, r]$ *par* φ.

$U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\}$ *est alors un fermé comme intersection de deux fermés.*

(ii) Par ailleurs, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\}$ *est une boule de* $\mathbb{R}^n$. *C'est une partie bornée de* $\mathbb{R}^n$.

Comme $U_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\}$, U_0 *est également une partie bornée de* $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\} \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^n}$$

(iii) F_y *est continue sur* U_0, *car chacune des applications :* $x \mapsto < x,y >$ *et* $\dfrac{< x,A.x >}{2}$ *est continue sur* U_0.

Il suffit, pour démontrer ces propriétés de continuité, de considérer les expressions :

$< x,y > = \sum_{k=1}^{n} x_k.y_k$ *et* $\dfrac{< x,A.x >}{2} = \dfrac{1}{2}. \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2$ *obtenues en rapportant* $\mathbb{R}^n$ *à la base orthonormale* $(u_1, u_2, ..., u_n)$ *de vecteurs propres de A considérée au 2)a).*

Les deux fonctions précédentes sont polynômiales en $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Or, une application continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ *admet un maximum sur cette partie.*

F_y *admet donc un maximum* $M = F_y(x_1)$ *sur* U_0, *atteint en un point* x_1 *de* U_0.

Par ailleurs, l'implication : $\| x \| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0)$ *impose* $\| x_0 \| \leq r$, *de sorte que* $x_0 \in U_0$.

On obtient : $x \in U,\ \| x \| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0) \leq F_y(x_1) = M$.

$M = F_y(x_1)$ *est donc aussi le maximum de* F_y *sur U.*

$$\boxed{F_y \text{ admet un maximum sur } U \text{ quelque soit } y \in \mathbb{R}, \text{ et } U(f) = \mathbb{R}^n}$$

3) b)

• $F_y(\dfrac{x+x'}{2}) - \dfrac{F_y(x)}{2} - \dfrac{F_y(x')}{2}$

$= < \dfrac{x+x'}{2}, y > - \dfrac{< \frac{x+x'}{2}, A.(\frac{x+x'}{2}) >}{2} - \dfrac{1}{2}. < x,y > + \dfrac{< x,A.x >}{4} - \dfrac{1}{2}. < x',y > + \dfrac{< x',A.x' >}{4}$.

Soit : $F_y(\frac{x+x'}{2}) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{2}.<x,y> + \frac{1}{2}.<x',y> - \frac{1}{8}.<x+x',A.(x+x')>$
$-\frac{1}{2}.<x,y> + \frac{1}{4}.<x,A.x> - \frac{1}{2}.<x',y> + \frac{1}{4}.<x',A.x'>$

$$F_y(\frac{x+x'}{2}) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{4}.<x,A.x> + \frac{1}{4}.<x',A.x'> - \frac{1}{8}.(<x,A.x> + <x,A.x'> + <x',A.x> + <x',A.x'>).$$

Comme $<x,A.x'> = <x',A.x>$, il vient :

$$F_y(\frac{x+x'}{2}) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{8}.<x,A.x> + \frac{1}{8}.<x',A.x'> - \frac{1}{4}.<x,A.x'>$$
$$= \frac{1}{8}.(<x,A.x> + <x',A.x'> - 2.<x,A.x'>).$$

$$F_y(\frac{x+x'}{2}) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{8}.(<x,A.x> + <x',A.x'> - <x,A.x'> - <x',A.x>)$$
$$= \frac{1}{8}.(<x,A.(x-x')> + <x',A.(x'-x)>)$$
$$= \frac{1}{8}.(<x-x',A.(x-x')>).$$

$$\boxed{F_y(\frac{x+x'}{2}) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{8}.(<x-x',A.(x-x')>)}$$

• (i) Soient $\overline{x}$ et $\overline{x}'$, deux éléments distincts de U en lesquels F_y atteint son maximum $M = f^*(y)$ sur U.

On a alors : $<\overline{x}-\overline{x}', A.(\overline{x}-\overline{x}')> \geq \lambda.\parallel \overline{x}-\overline{x}' \parallel > 0$, et donc, d'après l'égalité précédente :

$$F_y(\frac{\overline{x}+\overline{x}'}{2}) - \frac{F_y(\overline{x})}{2} - \frac{F_y(\overline{x}')}{2} > 0$$

Soit : $F_y(\frac{\overline{x}+\overline{x}'}{2}) > \frac{F_y(\overline{x})}{2} + \frac{F_y(\overline{x}')}{2} = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M = f^*(y)$.

$\boxed{\text{Si } F_y \text{ atteint son maximum } M = f^*(y) \text{ en deux points distincts } \overline{x} \text{ et } \overline{x}' \text{ de } U \text{, on a : } F_y(\frac{\overline{x}+\overline{x}'}{2}) > f^*(y)}$

(ii) Comme U est convexe le vecteur $\frac{\overline{x}+\overline{x}'}{2}$ est élément de U, et F_y prendrait en ce point une valeur strictement supérieure à son maximum $f^*(y)$ sur U, ce qui est contradictoire.

$\boxed{\text{Le maximum } f^*(y) \text{ de } F_y \text{ sur } U \text{ est donc atteint en un seul point de } U}$

Partie III

1) a) (i) Rapportons $\mathbb{R}^n$ à sa base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ et posons $x = \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k$, $x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i.e_i$ et $B = (b_{i,j})$. Alors : $B.x' = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}.x'_j).e_i$, et ${}^tB.x = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}.x_j).e_i$,

$$<x,B.x'> = \sum_{k=1}^{n} x_k.(\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}.x'_j) = \sum_{j=1}^{n} x'_j.(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}.x_k) = <{}^tB.x, x'>.$$

$$\boxed{\forall (x,x') \in (\mathbb{R}^n)^2,\ <x,B.x'> = <{}^tB.x,x'>}$$

(ii) Soit $y \in Im({}^tB)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y = {}^tB.x$.
Soit $x' \in Ker(B)$. On a $B.x' = 0$.
D'où : $<x,B.x'> = 0$. Soit : $<{}^tB.x,x'> = 0$, ou encore : $<y,x'> = 0$.
y est orthogonal à tout vecteur x' de $Ker(B)$. $y \in [Ker(B)]^{\perp}$.

$$\boxed{Im({}^tB) \subset [Ker(B)]^{\perp}}$$

(iii) On sait que B et ${}^tB$ ont même rang. Donc $dim(Im({}^tB)) = dim(Im(B))$.
Le théorème du rang appliqué à B donne : $dim(Im(B)) = dim(\mathbb{R}^n) - dim(Ker(B)) = dim([Ker(B)]^{\perp})$.
D'où : $dim(Im({}^tB)) = dim([Ker(B)]^{\perp})$.

$$\boxed{dim(Im({}^tB)) = dim([Ker(B)]^{\perp})}$$

(iv) $Im({}^tB) \subset [Ker(B)]^{\perp}$, et les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension. Ils sont donc égaux.

$$\boxed{Im({}^tB) = [Ker(B)]^{\perp}}$$

1) b) (i) En appliquant la relation obtenue au II2)b), il vient :

$\forall h \in Ker(B)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_y(\overline{x}+t.h) - F_y(\overline{x}) = <t.h, y - A.\overline{x}> - \frac{<t.h, A.(t.h)>}{2}$.

$$\boxed{\text{Soit : } F_y(\overline{x}+t.h) - F_y(\overline{x}) = t.<h,y-A.\overline{x}> - t^2.\frac{<h,A.h>}{2}}$$

(ii)

• Remarquons que $\overline{x}+t.h \in U$, car : $B.(\overline{x}+t.h) = B.\overline{x} + t.B.h = c + t.0 = c$ (ne pas oublier que h est élément du noyau de B).

F_y atteint son maximum sur U en $\overline{x}$, et : $F_y(\overline{x}+t.h) - F_y(\overline{x}) \leq 0$.

Soit : $t.<h,y-A.\overline{x}> - t^2.\frac{<h,A.h>}{2} \leq 0$ quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

Ou encore : $t.(<h,y-A.\overline{x}> - t.\frac{<h,A.h>}{2}) \leq 0$.

Le polynôme $P(t) = t.(<h,y-A.\overline{x}> - t.\frac{<h,A.h>}{2})$ ne peut être négatif sur $\mathbb{R}$ que si $<h,y-A.\overline{x}> = 0$.

La condition est en effet clairement suffisante, car alors $P(t) = -t^2.\frac{<h,A.h>}{2} \leq 0, t \in \mathbb{R}$.

Elle est aussi nécessaire, car sinon ou bien $P(t)$ est un trinôme admettant deux racines réelles distinctes 0 et $2.\frac{<h,y-A.\overline{x}>}{<h,A.h>}$, (cas où $<h,A.h> > 0$), ou bien $P(t) = t.<h,y-A.\overline{x}>$ (cas où $<h,A.h> = 0$).

Dans les deux cas, P changerait de signe sur $\mathbb{R}$.

On déduit que : $\forall h \in Ker(B)$, $<h,y-A.\overline{x}> = 0$.

Cela signifie que : $y - A.\overline{x} \in [Ker(B)]^{\perp} = Im({}^tB)$.

Il existe $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y - A.\overline{x} = {}^tB.\overline{z}$.

D'où les propriétés : $B.\overline{x} = c$ et $\exists\, \overline{z} \in \mathbb{R}^n,\ y - A.\overline{x} =^t B.\overline{z}$.

- Réciproquement, considérons un élément $\overline{x}$ de U possédant les deux propriétés précédentes.

$y - A.\overline{x}$, élément de l'image de ${}^tB$ est élément de l'orthogonal du noyau de B, et donc : $\forall\, h \in Ker(B),\ < h, y - A.\overline{x} >= 0$.

Il vient alors : $\forall\, h \in Ker(B),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ F_y(\overline{x} + t.h) - F_y(\overline{x}) = -t^2.\dfrac{< h, A.h >}{2} \leq 0$.

Soit v, un vecteur de U. Posons $h = v - \overline{x}$.

$B.h = B.(\overline{x} - v) = B.x - B.\overline{x} = c - c = 0$. h est élément de $Ker(B)$.

En prenant $t = 1$ dans l'égalité : $F_y(\overline{x} + t.h) - F_y(\overline{x}) = -t^2.\dfrac{< h, A.h >}{2} \leq 0$, on obtient :

$F_y(v) - F_y(\overline{x}) = -\dfrac{< h, A.h >}{2} \leq 0$, soit : $F_y(v) \leq F_y(\overline{x})$.

F_y atteint son maximum sur U au point $\overline{x}$.

$\boxed{\text{L'unique point } \overline{x} \text{ de } U \text{ où } F_y \text{ atteint son maximum est caractérisé par les propriétés : } B.\overline{x} = c \text{ et } \exists\, \overline{z} \in \mathbb{R}^n\ y - A.\overline{x} =^t B.\overline{z}}$

2) a) (i)

- Notons que A est inversible, puisque 0 n'est pas valeur propre de A.

La relation $A.x_p - y +^t B.z_p = 0$ équivaut donc à $x_p = A^{-1}(y -^t B.z_p)$.

z_0 est donné, et $x_0 = A^{-1}(y -^t B.z_0)$ est alors déterminé.

- Supposons connus x_p et z_p.

La seconde relation : $z_{p+1} = z_p + r.(B.x_p - c)$ permet alors de définir z_{p+1} de façon unique, puis la première relation donne : $x_{p+1} = A^{-1}(y -^t B.z_{p+1})$.

$\boxed{\text{Les relations } A.x_p - y +^t B.z_p = 0 \text{ et } z_{p+1} = z_p + r.(B.x_p - c) \text{ définissent donc deux suites uniques } (x_p)_{p\geq 0} \text{ et } (z_p)_{p\geq 0}}$

(ii)

- En ajoutant membre à membre les deux égalités : $A.x_p - y = -{}^tB.z_p$ et $y - A.\overline{x} =^t B.\overline{z}$, il vient :

$A.x_p - A.\overline{x} =^t B.\overline{z} -^t B.z_p$, soit : $A.(x_p - \overline{x}) =^t B.(\overline{z} - z_p)$.

- De la relation $z_{p+1} = z_p + r.(B.x_p - c)$, compte-tenu du fait que $c = B.\overline{x}$, on déduit : $z_{p+1} = z_p + r.(B.x_p - B.\overline{x}) = z_p - r.B.(x_p - \overline{x})$, puis : $z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} - r.B.(x_p - \overline{x})$.

$\boxed{\text{Les deux relations suivantes sont vérifiées : } A.(x_p - \overline{x}) =^t B.(\overline{z} - z_p) \text{ et } z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} - r.B.(x_p - \overline{x})}$

2) b) $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 = \| z_p - \overline{z} - r.B.(x_p - \overline{x}) \|^2$.

Développons ce carré scalaire.

$$\begin{aligned}\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 &= \| z_p - \overline{z} \|^2 + \| r.B.(x_p - \overline{x}) \|^2 + 2. < z_p - \overline{z}, r.B.(x_p - \overline{x} >.\\ &= \| z_p - \overline{z} \|^2 + r^2. \| B.(x_p - \overline{x}) \|^2 - 2.r. <^t B.(\overline{z} - z_p), x_p - \overline{x} >.\end{aligned}$$

Compte-tenu de la relation : $A.(x_p - \overline{x}) =^t B.(\overline{z} - z_p)$, on obtient :

$\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 = \| z_p - \overline{z} \|^2 + r^2. \| B.(x_p - \overline{x}) \|^2 - 2.r. < A.(x_p - \overline{x}), x_p - \overline{x} >$.

$$\boxed{\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 = \| z_p - \overline{z} \|^2 - 2.r. < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > + r^2. \| B.(x_p - \overline{x}) \|^2}$$

2) c) (i) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, les valeurs propres de A (distinctes ou non), et $A = P \times D \times^t P$, une relation de similitude entre A et la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

(Rappelons que A, symétrique réelle, est diagonalisable, et que l'on peut choisir P orthogonale : $P^{-1} =^t P$).

Comme $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, on peut poser : $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, puis :

$A^{\frac{1}{2}} = P \times \Delta \times^t P$.

- Il vient : $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = P \times \Delta^2 \times^t P = P \times D \times^t P = A$.

- ${}^t\left(A^{\frac{1}{2}}\right) =^t \left(P \times \Delta \times^t P\right) =^t \left({}^tP\right) \times^t \Delta \times^t P = P \times \Delta \times^t P = A^{\frac{1}{2}}$.

$A^{\frac{1}{2}}$ est bien symétrique.

- Les valeurs propres de $A^{\frac{1}{2}}$ sont $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. Elles sont strictement positives.

$\boxed{\text{Il existe une matrice symétrique réelle } A^{\frac{1}{2}}, \text{ à valeurs propres strictement positives, telle que : } \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A}$

(ii)

- 0 n'étant pas valeur propre de $A^{\frac{1}{2}}$, cette matrice est inversible. Notons $A^{-\frac{1}{2}}$ sa matrice inverse.

$A^{-\frac{1}{2}} = P \times \Delta^{-1} \times^t P$, avec $\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$, de sorte que $A^{-\frac{1}{2}}$ est également symétrique.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$\| BA^{-\frac{1}{2}}.x \|^2 = < BA^{-\frac{1}{2}}.x, BA^{-\frac{1}{2}}.x > = < x, {}^t\left(BA^{-\frac{1}{2}}\right) \times BA^{-\frac{1}{2}}.x >$.

Comme ${}^t\left(BA^{-\frac{1}{2}}\right) =^t \left(A^{-\frac{1}{2}}\right) \times^t B = \left(A^{-\frac{1}{2}}\right) \times^t B$, il vient :

$\| BA^{-\frac{1}{2}}.x \|^2 = < x, A^{-\frac{1}{2}}({}^tB)BA^{-\frac{1}{2}}.x >$.

$$\boxed{\| BA^{-\frac{1}{2}}.x \|^2 = < x, A^{-\frac{1}{2}}({}^tB)BA^{-\frac{1}{2}}.x >}$$

- ${}^t\left(A^{-\frac{1}{2}} \times^t B \times B \times A^{-\frac{1}{2}}\right) =^t \left(A^{-\frac{1}{2}}\right) \times^t B \times^t \left({}^tB\right) \times^t \left(A^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(A^{-\frac{1}{2}}\right) \times^t B \times B \times A^{-\frac{1}{2}}$.

La matrice $\left(A^{-\frac{1}{2}}\right) \times^t B \times B \times A^{-\frac{1}{2}}$ est symétrique.

Soit α, la plus grande valeur propre de $A^{-\frac{1}{2}}({}^tB)BA^{-\frac{1}{2}}$.

Remarquons que le signe > 0 des valeurs propres de A n'intervenait pas dans la démonstration de l'encadrement de la question du II2)a). Il vient donc :

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ < x, A^{-\frac{1}{2}})({}^tB)BA^{-\frac{1}{2}}.x > \leq \alpha. \| x \|^2$.

D'où l'inégalité : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \| BA^{-\frac{1}{2}}.x \|^2 \leq \alpha. \| x \|^2$.

Supposons que $\alpha \leq 0$. On obtiendrait : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \| BA^{-\frac{1}{2}}.x \|^2 \leq 0$.

Soit : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \| BA^{-\frac{1}{2}}.x \|^2 = 0$, ou encore : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ BA^{-\frac{1}{2}}.x = 0$.

La matrice $A^{-\frac{1}{2}}$ étant inversible, le vecteur $A^{-\frac{1}{2}}.x$ parcourt tout $\mathbb{R}^n$ lorsque x parcourt lui-même $\mathbb{R}^n$.

Il viendrait donc : $\forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ B.v = 0$, soit $B = 0$, ce qui est contraire aux hypothèses (B est supposée non nulle).

On conclut que $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{La plus grande valeur propre de } A^{-\frac{1}{2}}({}^tB)BA^{-\frac{1}{2}} \text{ est strictement positive}}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $A^{-\frac{1}{2}}$ étant inversible, il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que : $x = A^{-\frac{1}{2}}.v$.

D'après ce qui précède : $\| BA^{-\frac{1}{2}}.v \|^2 = < v, A^{-\frac{1}{2}}({}^tB)BA^{-\frac{1}{2}}.v > \leq \alpha. < v, v >$.

Soit : $\| B.x \|^2 \leq \alpha. < v, v >$.

Comme $v = A^{\frac{1}{2}}.x$, on a : $< v, v > = < A^{\frac{1}{2}}.x, A^{\frac{1}{2}}.x > = < x, {}^t(A^{\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.x >$.

Compte-tenu du fait que $A^{\frac{1}{2}}$ est symétrique et de la propriété : $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$, il vient : $< v, v > = < x, A.x >$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \| B.x \|^2 \leq \alpha. < x, A.x >}$$

2) d) (i) D'après l'égalité du III-2)b), on a :

$\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 = -2.r. < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > + r^2. \| B.(x_p - \overline{x}) \|^2$.

En appliquant l'inégalité de la question précédente au vecteur $x_p - \overline{x}$, il vient :

$\| B.(x_p - \overline{x}) \|^2 \leq \alpha < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) >$.

D'où : $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \leq -2.r. < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > + r^2.\alpha < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) >$.

Soit : $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \leq r.(r.\alpha - 2). < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) >$.

D'autre part, d'après II-2)a) : $< x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > \geq \lambda. \| x_p - \overline{x} \|^2 \geq 0$, et $r.(r.\alpha - 2) < 0$ puisque $r \in \left[0, \frac{2}{\alpha}\right[$.

On conclut que : $r.(r.\alpha - 2). < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > \leq 0$.

$$\boxed{\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \leq r.(r.\alpha - 2). < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > \leq 0}$$

(ii) D'après l'inégalité $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \leq 0$, la suite $(\| z_p - \overline{z} \|)_{p \geq 0}$ est décroissante.

$$\boxed{\text{Minorée par 0, la suite décroissante } (\| z_p - \overline{z} \|)_{p\geq 0} \text{ converge}}$$

(iii) De là, on déduit que $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, et l'encadrement : $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \leq r.(r.\alpha - 2). < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) > \leq 0$ montre que $r.(r.\alpha - 2). < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) >$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, ainsi que $< x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x}) >$.

L'inégalité du II-2)a) appliquée au vecteur $x_p - \overline{x}$, qui s'écrit : $0 \leq \lambda. \| x_p - \overline{x} \|^2 \leq < x_p - \overline{x}, A.(x_p - \overline{x} >$ montre alors que $\lambda. \| x_p - \overline{x} \|^2$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, et, puisque $\lambda \neq 0$, que $\| x_p - \overline{x} \|$ tend aussi vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_p)_{p\leq 0} \text{ converge vers } \overline{x} \text{ lorsque } p \text{ tend vers } +\infty}$$

Voie économique

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 16 mai 2005, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Dans ce problème, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance.

Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles, on note, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Préliminaires

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une espérance m. Énoncer, *avec précision*, la loi faible des grands nombres pour cette suite (X_n).

2. Soit δ un réel strictement positif et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'intervalle $]m - \delta, m + \delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right)$$

Partie I. Un exemple discret

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On rappelle que $P(X = 1) = p$, $\quad P(X = 0) = 1 - p = q$.

1. a) Montrer que pour tout s réel, la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance $E(e^{sX})$.

b) Déterminer la fonction $\varphi : s \longmapsto E(e^{sX})$.

2. a) Préciser la loi de S_n.

b) Déterminer $\frac{S_n}{n}(\Omega)$ et la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

c) Soit s réel. Montrer que $E(e^{s\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(s/n))^n$.

Soit a un réel fixé de $]0,1[$.

3. a) On note $K_a = \{k \in [\![0,n]\!] \mid k/n \geqslant a\}$. Soit s un réel positif. Montrer que

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant \sum_{k\in K_a} e^{s\frac{k}{n}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$$

b) Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (\varphi(s/n))^n e^{-as}$$

4. On suppose dans cette question que $a > p$.

a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln\varphi(s)$$

b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif $h(a,p)$ que l'on calculera en fonction de a et p.

c) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t>0}(at - \ln\varphi(t))} = e^{-nh(a,p)}$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1-a > 1-p$).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t<0}(at - \ln\varphi(t))} = e^{-nh(1-a,1-p)} = e^{-nh(a,p)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Déduire des questions précédentes que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-n\min(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p))}$$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

7. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p, $(0 < p < 1)$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de n, $(n \geqslant 1)$, objets qu'il analyse.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième objet prélevé est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

a) Montrer que $F_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p.

b) Calculer le risque quadratique $r_n = E\left((F_n - p)\right)^2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

8. Soit α un réel de $]0,1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1-\alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n}\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.
Montrer qu'un intervalle de confiance de p au niveau $1-\alpha$ est donné par $[U_n, V_n]$ tel que

$$P(U_n \leqslant p \leqslant V_n) \geqslant 1 - \alpha$$

avec

$$U_n = f_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}},\ V_n = f_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}$$

Partie II. Un exemple continu.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels α pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}$, on pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

2. Exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $\alpha \in \mathcal{D}$ fixé. Montrer que la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

est une densité.

On dira qu'une variable aléatoire X de densité f_α est une variable aléatoire qui suit une loi $\gamma(\alpha)$.

On admettra que si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi $\gamma(\alpha)$ et Y suivant une loi $\gamma(\beta)$, alors $X+Y$ suit une loi $\gamma(\alpha+\beta)$.

On admettra également que, sous les mêmes hypothèses sur X et Y, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.

4. a) Soit X une variable aléatoire réelle, suivant une loi $\gamma(\alpha)$. Calculer l'espérance $E(X)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

5. a) Déterminer l'ensemble I des réels s tels que e^{sX} admette une espérance $E(e^{sX})$. On pose alors

$$\varphi(s) = E(e^{sX})$$

b) Montrer que la fonction φ est positive et convexe sur son domaine de définition I.

c) Soit $s \in I$. Montrer que $E(e^{s\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(s/n))^n$.

6. En utilisant le théorème de transfert, montrer que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^+$

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$$

puis que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^-$

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right)$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $a \neq \alpha$. Pour tout $s \in I$, on pose

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln \varphi(s)$$

Étudier la fonction ℓ_a et dresser son tableau de variation.

8. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose

$$h(a) = \sup_{s \in I} \ell_a(s)$$

Exprimer $h(a)$ en fonction de a. Montrer que si $a \neq \alpha$, alors $h(a) > 0$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un n échantillon de la loi de X. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Montrer que, pour tout s tel que $0 < s < n$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (\varphi(s/n))^n e^{-as}$$

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \inf_{0<s<n} e^{-as}(\varphi(s/n))^n$$

c) Montrer que si $a > \alpha$ alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup_{t \in I \cap \mathbb{R}^+} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}$$

10. Montrer que si $a < \alpha$ alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup_{t \in I \cap \mathbb{R}^-} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \alpha\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-nH(\alpha,\varepsilon)}$$

où $H(\alpha, \varepsilon) = \min(h(\alpha - \varepsilon), h(\alpha + \varepsilon))$.

Préliminaires

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires, non corrélées, de même loi, définies sur le même univers probabilisé.

On suppose que ces variables aléatoires admettent une espérance m et une variance σ^2.

Alors : $\forall \delta > 0,\ P(|\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n.\delta^2}$.

En particulier :

$$\boxed{P(|\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \geq \delta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. L'inclusion $]m-\delta, m+\delta[\subset \overline{A}$ *équivaut à l'inclusion suivante entre les complémentaires :* $A \subset]-\infty, m-\delta] \cup [m+\delta, +\infty[$.

D'où l'inclusion : $(\frac{S_n}{n} \in A) \subset (\frac{S_n}{n} \in]-\infty, m-\delta] \cup [+\delta, +\infty[)$.

Ou encore : $(\frac{S_n}{n} \in A) \subset (|\frac{S_n}{n} - m| \geq \delta)$.

De là, on déduit : $P(\frac{S_n}{n} \in A) \leq P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \delta)$.

Comme $P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \delta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *d'après 1., on conclut que :*

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \in A) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Partie I : un exemple discret

1. a) La variable aléatoire $e^{s.X}$ prend les valeurs 1 et e^s avec les probabilités respectives q et p.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } e^{s.X} \text{ admet donc une espérance.}}$$

1. b) De plus : $E(e^{s.X}) = 1.P(X=0) + e^s.P(X=1) = q + p.e^s$.

$$\boxed{\text{On obtient donc : } \varphi :\ s \mapsto E(e^{s.X}) = q + p.e^s}$$

2. a) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.*

$$\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n, p).}$$

2. b) (i) $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et donc : $\dfrac{S_n}{n}(\Omega) = \{\dfrac{k}{n} \mid 0 \le k \le n\}$.

(ii) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$P(\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{k}{n}) = P(S_n = k) = \binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$.

$$\boxed{\frac{S_n}{n}(\Omega) = \{\frac{k}{n} \mid 0 \le k \le n\} \text{ et : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}}$$

2. c) $E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = E\big(\exp(\dfrac{s}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i)\big) = E(\prod_{i=1}^{n} \exp(\dfrac{s}{n}.X_i))$.

Comme les variables aléatoires X_i, $1 \le i \le n$, sont indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $\exp(\dfrac{s}{n}.X_i)$, $1 \le i \le n$.

D'où : $E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = E(\prod_{i=1}^{n} \exp(\dfrac{s}{n}.X_i)) = \prod_{i=1}^{n}\Big[E\big(\exp(\dfrac{s}{n}.X_i)\big)\Big] = \prod_{i=1}^{n} \varphi(\dfrac{s}{n}) = (\varphi(\dfrac{s}{n}))^n$.

$$\boxed{E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(\frac{s}{n}))^n}$$

3. a) Soit $K_a = \{k \in [\![0, n]\!] \mid \dfrac{k}{n} \ge a\}$, $a \in]0, 1[$.

$E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = \sum_{k=0}^{n} e^{s.\frac{k}{n}}.P(\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{s.\frac{k}{n}}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$.

Comme K_a est inclus dans $[\![0, n]\!]$, et que les termes de la somme précédente sont ≥ 0, on obtient :

$E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) \ge \sum_{k \in K_a} e^{s.\frac{k}{n}}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$.

D'autre part, s étant supposé positif : $\forall k \in K_a$, $e^{s.\frac{k}{n}}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k} \ge e^{s.a}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$.

D'où : $\sum_{k \in K_a} e^{s.\frac{k}{n}}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k} \ge \sum_{k \in K_a} e^{s.a}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$.

Enfin : $\sum_{k \in K_a} e^{s.a}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k} = e^{s.a}.\Big(\sum_{k \in K_a} \binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}\Big) = e^{s.a}.\Big(\sum_{k \in K_a} P(\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{k}{n})\Big)$

Soit : $\sum_{k \in K_a} e^{s.a}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k} \ge e^{s.a}.P(\dfrac{S_n}{n} \ge a)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) \ge \sum_{k \in K_a} e^{s.\frac{k}{n}}.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k} \ge e^{a.s}.P(\frac{S_n}{n} \ge a)}$$

3. b) En tenant compte de l'égalité : $E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(\dfrac{s}{n}))^n$ obtenue au 2.c), il vient :

$(\varphi(\dfrac{s}{n}))^n \ge e^{a.s}.P(\dfrac{S_n}{n} \ge a)$, puis : $P(\dfrac{S_n}{n} \ge a) \le e^{-a.s}.(\varphi(\dfrac{s}{n}))^n$.

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \ge a) \le (\varphi(\frac{s}{n}))^n.e^{-a.s}}$$

4.a) $l_a(s) = a.s - \ln[\varphi(s)] = a.s - \ln(p.e^s + q), \quad s \in \mathbb{R}$.

$l'_a(s) = a - \dfrac{p.e^s}{p.e^s + q} = \dfrac{p.(a-1).e^s + a.q}{p.e^s + q}$.

$l'_a(s) = 0$ si et seulement si : $e^s = \dfrac{a.q}{p.(1-a)}$.

Soit : $s = \ln\left(\dfrac{a.q}{p.(1-a)}\right) = \ln\left(\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)}\right) = s_0$.

D'où le tableau de variation de φ.

$$\begin{array}{c|ccccc}
s & 0 & & s_0 & & +\infty \\
\hline
l'_a(s) & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & l_a(s_0) & & \\
l_a & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 0 & & & & -\infty
\end{array}$$

- $l_a(0) = -\ln(p+q) = -\ln(1) = 0$
- Lorsque s tend vers $+\infty$, $l_a(s) = a.s - \ln(e^s) - \ln(p + q.e^{-s}) = (a-1).s - \ln(p+q.e^{-s}) \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

$(a < 1)$.

4. b) $\boxed{\text{La fonction } l_a \text{ atteint donc en } s_0 = \ln\left(\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)}\right) \text{ un maximum absolu } h(a,p) \text{ strictement positif.}}$

$h(a,p) = l_a\left(\ln\left(\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)}\right)\right) = a.\ln\left(\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)}\right) - \ln\left(p.\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)} + 1 - p\right)$.

Soit : $h(a,p) = a.\ln\left(\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)}\right) - \ln\left(\dfrac{1-p}{1-a}\right)$.

$h(a,p) = \ln\left(\dfrac{a^a.(1-p)^a}{p^a.(1-a)^a} \times \dfrac{1-a}{1-p}\right) = \ln\left(\dfrac{a^a}{p^a} \times \dfrac{(1-p)^{a-1}}{(1-a)^{a-1}}\right)$.

$$\boxed{h(a,p) = a.\ln\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a).\ln\left(\frac{1-a}{1-p}\right)}$$

4. c) Soit $s > 0$. D'après l'inégalité obtenue au I.3.b), il vient :

$P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-a.s}.\left(\varphi\left(\dfrac{s}{n}\right)\right)^n$.

$\left(\varphi\left(\dfrac{s}{n}\right)\right)^n = \left(p.e^{\frac{s}{n}} + q\right)^n = \exp\left(n.\ln(p.e^{\frac{s}{n}} + q)\right)$.

D'où : $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp\left(-n.\left(a.\dfrac{s}{n} - \ln(p.e^{\frac{s}{n}} + q)\right)\right)$.

Soit : $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp\left(-n.l_a\left(\dfrac{s}{n}\right)\right)$.

Prenons alors s tel que $\dfrac{s}{n} = s_0 = \ln\left(\dfrac{a.(1-p)}{p.(1-a)}\right)$.

Il vient :

$$\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n.h(a,p)} = e^{-n.\max\limits_{t>0}(a.t - \ln(\varphi(t)))}}$$

5. a) $n - S_n = n - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (1 - X_i)$.

$X'_i = 1 - X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$.

En effet : $P(X'_i = 1) = P(X_i = 0) = q$ et $P(X'_i = 0) = P(X_i = 1) = p$.

Comme les variables aléatoires X_i, $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $X'_i = 1 - X_i$, $1 \leq i < n$.

$$\boxed{n - S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,q) = (n, 1-p)}$$

5. b) $P\left(\dfrac{S_n}{n} \leq a\right) = P\left(\dfrac{n - S_n}{n} \geq 1 - a\right)$.

Remarquons alors que $1 - a > q$ et appliquons l'inégalité de la question 4.c) précédente à la variable aléatoire $n - S_n$. Il vient :

$$\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n.h(1-a,q)} = e^{-n.h(1-a,1-p)}}$$

L'expression de $h(a,p)$ obtenue au 4.b) montre que : $h(1-a, 1-p) = h(a,p)$.

$$\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n.h(a,p)} = e^{-n.\max\limits_{t>0}(a.t - \ln(\varphi(t)))}}$$

6. a) $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\dfrac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) + P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right)$.

- D'après l'inégalité du 5.b) appliquée avec $a = p - \varepsilon$ (on a bien $a < p$), il vient :

$P\left(\dfrac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-n.h(p-\varepsilon,p)}$.

- D'après l'inégalité du 4.c) appliquée avec $a = p + \varepsilon$ (on a bien $a > p$), il vient :

$P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-n.h(p+\varepsilon,p)}$.

D'où : $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n.h(p-\varepsilon,p)} + e^{-n.h(p+\varepsilon,p)} \leq e^{-n.min(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p))} + e^{-n.min(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p))}$.

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2.e^{-n.min(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p))}}$$

6. b) D'après 4.b), $h(p-\varepsilon,p) > 0$ et $h(p+\varepsilon,p) > 0$, de sorte que : $min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right) > 0$,

et : $e^{-n.\left(min\left(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p)\right)\right)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'encadrement : $0 \leq P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2.e^{-n.min(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p))}$ montre alors que :

$P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

7. a) $E(F_n) = E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}.E(S_n) = \dfrac{1}{n}.E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{1}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Chacune des variables aléatoires X_i, $1 \leq i \leq n$, étant une variable de Bernoulli de paramètre p, on a :

$E(X_i) = p$, $1 \leq i \leq n$.

D'où : $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}.n.p = p$.

$$\boxed{E(F_n) = p. \text{ et } F_n = \frac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } p}$$

7. b) $r_n = E[(F_n - p)^2] = E([F_n - E(F_n)]^2) = V(F_n)$.

Soit : $r_n = V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}.V(S_n)$.

Les variables X_i, $1 \leq i \leq n$, étant indépendantes, $V(S_n) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n.p.q.$

D'où : $r_n = \frac{n.p.q}{n^2} = \frac{p.q}{n}$.

$$\boxed{r_n = \frac{p.(1-p)}{n}}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} r_n = 0}$$

8. a) Les variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes, et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre p.

D'après le théorème de la limite centrée (ou théorème central-limite), la suite des variables aléatoires centrées réduites $(\sqrt{n}.\frac{F_n - p}{\sqrt{p.(1-p)}})_{n \geq 1} = (\frac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}})_{n \geq 1}$ converge en loi, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une variable G qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

8. b) Cherchons $\delta > 0$ tel que $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \alpha$.

$P(|F_n - p| \geq \delta) = P(|\sqrt{n}.\frac{F_n - p}{\sqrt{p.(1-p)}}| \geq \sqrt{n}.\frac{\delta}{\sqrt{p.(1-p)}})$.

En supposant n assez grand pour que l'on puisse assimiler la variable aléatoire $\sqrt{n}.\frac{F_n - p}{\sqrt{p.(1-p)}}$ à une variable aléatoire G suivant une loi normale centrée réduite, il vient :

$P(|F_n - p| \geq \delta) = P(|G| \geq \sqrt{n}.\frac{\delta}{\sqrt{p.(1-p)}})$.

Posons $\delta_1 = \sqrt{n}.\frac{\delta}{\sqrt{p.(1-p)}}$.

$P(|G| \geq \delta_1) = P(G \leq -\delta_1) + P(G \geq \delta_1) = 2.P(G \geq \delta_1) = 2.[1 - P(G \leq \delta_1)] = 2 - 2.\Phi(\delta_1)$.

On aura $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \alpha$ lorsque $2 - 2.\Phi(\delta_1) \leq \alpha$, soit $\Phi(\delta_1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Considérons alors le réel t_α tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Puisque la fonction de répartititon Φ est croissante sur $\mathbb{R}$, la condition précédente, qui s'écrit : $\Phi(\delta_1) \geq \varphi(t_\alpha)$ est remplie lorsque $\delta_1 \geq t_\alpha$.

D'autre part, quel que soit $p \in]0,1[$, ona : $p.(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

D'où : $\delta_1 = \sqrt{n}.\frac{\delta}{\sqrt{p.(1-p)}} \geq 2.\delta.\sqrt{n}$.

La condition $\delta_1 \geq t_\alpha$ sera remplie a fortiori si $2.\delta.\sqrt{n} \geq t_\alpha$, soit $\delta \geq \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}$.

Posons $\delta = \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}$.

On a : $P(|F_n - p| \geq \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}) \leq \alpha$, et, en passant à l'événement contraire : $P(|F_n - p| < \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}) \geq 1 - \alpha$.

Soit : $P(F_n - \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}} < p < F_n + \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}) \geq 1 - \alpha$.

Posons alors : $U_n = f_n - \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}$ et $V_n = f_n + \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}$.

Il vient : $P(U_n \leq p \leq V_n) \geq 1 - \alpha$

$$\boxed{\text{Un intervalle de confiance de } p \text{ au seuil } 1-\alpha \text{ est } [U_n, V_n], \text{ avec } U_n = f_n - \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}} \text{ et } V_n = f_n + \frac{t_\alpha}{2.\sqrt{n}}}$$

Partie II : un exemple continu

1. La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}.e^{-t}$ est continue sir $]0,+\infty[$, de sorte que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ pose deux problèmes de convergence : en 0^+ et en $+\infty$.

(i) En 0^+.

$t^{\alpha-1}.e^{-t} \underset{0^+}{\approx} t^{\alpha-1} \underset{0^+}{\approx} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$.

La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}.e^{-t}$ étant positive, le critère de comparaison par équivalence avec les fonctions de Riemann montre que l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ converge si et seulement si $1 - \alpha < 1$, soit si et seulement si $\alpha > 0$.

(ii) En $+\infty$.

Notons que : $t^2.t^{\alpha-1}.e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après les prépondérances classiques.

On en déduit que $t^{\alpha-1}.e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}.e^{-t}$ étant positive, le critère de comparaison par inégalité avec les fonctions de Riemann montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ converge quel que soit α.

$$\boxed{\text{Finalement : l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0, \text{ et } \mathcal{D} =]0,+\infty[}$$

2. (i) Soient $\varepsilon > 0$ et $T > 0$.

Considérons l'intégrale $\int_\varepsilon^T t^\alpha.e^{-t}\,dt$, et intégrons par parties en dérivant le facteur t^α et en intégrant le facteur e^{-t}.

$\int_\varepsilon^T t^\alpha.e^{-t}\,dt = \left[t^\alpha.(-e^{-t})\right]_\varepsilon^T - \int_\varepsilon^T \alpha.t^{\alpha-1}.(-e^{-t})\,dt = -T^\alpha.e^{-T} + \varepsilon^\alpha.e^{-\varepsilon} + \alpha.\int_\varepsilon^T t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt.$

Faisons alors tendre ε vers 0^+ et T vers $+\infty$.

- $\varepsilon^\alpha.e^{-\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (car $\alpha > 0$).
- $T^\alpha.e^{-T} \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il vient donc : $\int_0^{+\infty} t^\alpha.e^{-t}\,dt = \alpha.\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$.

$$\boxed{\forall\ \alpha > 0,\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha.\Gamma(\alpha)}$$

(ii) On a alors : $\forall\ n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ \Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1)$.

Itérons cette relation. Il vient : $\Gamma(n) = (n-1).(n-2)\cdots 1.\Gamma(1) = (n-1)!.\Gamma(1)$.

$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0.e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 1.$

D'où : $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ \Gamma(n) = (n-1)!}$$

3. Soit f_α, *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par :* $f_\alpha(t) = \left|\begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t} & si\ t>0 \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{array}\right.$.

- f_α *est continue sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$.
- $f_\alpha(t) \underset{t\to0^-}{\longrightarrow} 0$.
- $f_\alpha(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$ *si* $\alpha>1$, $f_\alpha(t) \underset{t\to0^-}{\longrightarrow} 1$ *si* $\alpha = 1$ *et* $f_\alpha(t) \underset{t\to0^-}{\longrightarrow} +\infty$ *si* $0<\alpha<1$.

f_α *admet donc une limite, finie ou infinie, à droite et à gauche, en 0.*

- $f_\alpha \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\Gamma(\alpha) = 1.$

$$\boxed{\text{Les quatre points précédents prouvent que } f_\alpha \text{ est une densité de probabilité}}$$

4. a) $E(X)$ *existe si l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_\alpha(t)\,dt$ *est (absolument) convergente, soit si l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ *est convergente.*

Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^{+\infty} t^{\alpha}.e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\Gamma(\alpha+1) = \alpha.$

$$\boxed{\text{Une v.a.r. } X \text{ qui suit une loi } \gamma(\alpha) \text{ admet donc une espérance, et } E(X) = \alpha}$$

4. b) La variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ *est somme des variables* X_i, $1 \leq i \leq n$, *qui sont indépendantes et suivent une loi* $\gamma(\alpha)$.

D'après la remarque de l'énoncé, S_n *suit une loi* $\gamma(\beta)$, *avec :* $\beta = n.\alpha$.

Elle admet donc pour densité la fonction $f_{n.\alpha}$ *définie par :* $f_{n.\alpha}(t) = \left|\begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(n.\alpha)}.t^{n.\alpha-1}.e^{-t} & si\ t>0 \\ 0 & si\ t\leq 0 \end{array}\right.$.

Déterminons alors la loi de la variable $\dfrac{S_n}{n}$.

- *Comme* $S_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, *on a :* $\dfrac{S_n}{n}(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
- *Soit H, la fonction de répartition de* $\dfrac{S_n}{n}$.

Soit $x>0$. $H(x) = P(\dfrac{S_n}{n} \leq x) = P(S_n \leq n.x) = \displaystyle\int_0^{n.x} f_{n.\alpha}(t)\,dt = \int_0^{n.x}\frac{1}{\Gamma(n.\alpha)}.t^{n.\alpha-1}.e^{-t}\,dt.$

D'où une densité h de $\dfrac{S_n}{n}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$:

$h(x) = H'(x) = n.\dfrac{1}{\Gamma(n.\alpha)}.(n.x)^{n.\alpha-1}.e^{-n.x}$.

$$\boxed{\text{La loi de } \frac{S_n}{n} \text{ est définie par la densité } g : h(x) = \frac{n^{n.\alpha}}{\Gamma(n.\alpha)}x^{n.\alpha-1}.e^{-n.x} \text{ si } x>0 \text{ et } h(x) = 0 \text{ si } x \leq 0}$$

Remarque : *En introduisant les lois Gamma à deux paramètres, on peut dire que* $\dfrac{S_n}{n}$ *suit une loi Gamma de paramètres* $(\dfrac{1}{n}, n.\alpha)$.

5. a) $e^{s.X}$ *admet une espérance si l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.t}.f_\alpha(t)\,dt$ *est (absolument) convergente, soit si l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{s.t}.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ *est convergente.*

Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{s.t}.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t}\,dt.$

Cette dernière intégrale pose deux problèmes de convergence : en 0^+ *et en* $+\infty$.

(i) En 0^+.

$t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t} \underset{0^+}{\approx} t^{\alpha-1} \underset{0^+}{\approx} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$.

D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t}\,dt$ *converge puisqu'ici :* $\alpha > 0$.

(ii) En $+\infty$.

<u>**1er cas** : $s<1$.</u>

$t^2.t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *d'après les prépondérances classiques.*

$t^{\alpha-1}.e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, *et le critère de comparaison par inégalité avec les fonctions de Riemann montre que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t}\,dt$ *converge.*

<u>**2ème cas** : $s=1$.</u>

$t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t} = t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$, *et* $1-\alpha<1$, *puisque* $\alpha>0$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ *diverge.*

<u>**3ème cas** : $s>1$.</u>

$t^{\alpha-1}.e^{(s-1).t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *d'après les prépondérances classiques.*

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt$ *diverge.*

$$\boxed{E(e^{s.X}) \text{ existe si et seulement si } s<1, \text{ et } I =]-\infty,1[}$$

5. b) Soit $\varphi :\ s \mapsto \varphi(s) = E(e^{s.X})$, $s<1$.

(i) $e^{s.X} > 0$. *Donc* $\varphi(s) \geq 0$ *pour* $s<1$.

(ii) Soit s et t, deux réels de l'intervalle $I =]-\infty,1[$, $s \leq t$.

Soit, par ailleurs, λ, un élément de $[0,1]$.

La convexité de la fonction exponentielle permet d'écrire :

$e^{[\lambda.s+(1-\lambda).t].X} = e^{\lambda.(s.X)+(1-\lambda).(t.X)} \leq \lambda.e^{s.X} + (1-\lambda).e^{t.X}$.

D'où l'inégalité suivante entre les espérances : $E\big(e^{[\lambda.s+(1-\lambda).t].X}\big) \leq E\big(\lambda.e^{s.X} + (1-\lambda).e^{t.X}\big)$

(on notera que ces espérances existent car s, t et $\lambda.s+(1-\lambda).t$ sont éléments de $I =]-\infty,1[$).

La linéarité de l'espérance permet ensuite d'écrire : $E\big(e^{[\lambda.s+(1-\lambda).t].X}\big) \leq \lambda.E\big(e^{s.X}\big) + (1-\lambda).E\big(e^{t.X}\big)$

On obtient donc l'inégalité : $\varphi(\lambda.s+(1-\lambda).t) \leq \lambda.\varphi(s) + (1-\lambda).\varphi(t)$.

$$\boxed{\varphi : x \mapsto E\big(e^{s.X}\big) \text{ est convexe et positive sur l'intervalle } I =]-\infty,1[}$$

5. c) Les variables aléatoires X_i, $1 \leq i \leq n$ étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $e^{s.X_i}$, $1 \leq i \leq n$.

D'où : $E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) = E\big(\exp(\frac{s}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i)\big) = E\big(\prod_{i=1}^{n} \exp(\frac{s}{n}.X_i)\big) = \prod_{i=1}^{n}\Big[E\big(\exp(\frac{s}{n}.X_i)\big)\Big]$.

Puisque les variables aléatoires X_i, $1 \leq i \leq n$, suivent toutes la même loi que X, on a : $E\big(\exp(\frac{s}{n}.X_i)\big) = E\big(\exp(\frac{s}{n}.X)\big) = \varphi(\frac{s}{n})$.

D'où : $E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(\frac{s}{n}) = \big(\varphi(\frac{s}{n})\big)^n$.

$$\boxed{E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) = \big(\varphi(\frac{s}{n})\big)^n}$$

6. (i) Soit $s \in I \cap \mathbb{R}_+ = [0,1[$.

Notons à nouveau h, une densité de $\dfrac{S_n}{n}$.

$E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.t}.h(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{s.t}.h(t)\,dt \geq \int_{a}^{+\infty} e^{s.t}.h(t)\,dt$.

Comme $e^{s.t}.h(t) \geq e^{s.a}.h(t)$ sur $[a,+\infty[$, il vient :

$E(e^{s.t}) \geq \int_{a}^{+\infty} e^{s.a}.h(t)\,dt = e^{s.a}.\int_{a}^{+\infty} h(t)\,dt = e^{s.a}.P(\frac{S_n}{n} \geq a)$.

$$\boxed{\text{Si } s \in [0,1[, \text{ on a : } E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) \geq e^{s.a}.P\big(\frac{S_n}{n} \geq a\big)}$$

(ii) Soit maintenant $s \in I \cap \mathbb{R}_- =]-\infty,0]$.

$E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.t}.h(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{s.t}.h(t)\,dt \geq \int_{0}^{a} e^{s.t}.h(t)\,dt$.

Remarquons que : $e^{s.t}.h(t) \geq e^{s.a}.h(t)$ sur $[0,a]$, car $s \leq 0$.

Il vient : $E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) \geq \int_{0}^{a} e^{s.a}.h(t)\,dt = e^{s.a}.\int_{0}^{a} h(t)\,dt = e^{s.a}.P(\frac{S_n}{n} \leq a)$.

$$\boxed{\text{Si } s \in]-\infty,0], \text{ on a : } E\big(e^{s.\frac{S_n}{n}}\big) \geq e^{s.a}.P\big(\frac{S_n}{n} \leq a\big)}$$

7. $l_a(s) = a.s - \ln\big(E(e^{s.X})\big)$, $s \in]-\infty,1[$.

Calculons $E(e^{s.X})$, X suivant la loi $\gamma(\alpha)$.

$E(e^{s.X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.t}.f_\alpha(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{s.t}.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.t^{\alpha-1}.e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-(1-s).t}\,dt$.

Effectuons le changement de variable $u = (1-s).t$ dans l'intégrale précédente.

$du = (1-s).dt$. Comme $1-s > 0$, u tend vers 0 lorsque t tend vers 0, et u tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

$E(e^{s.X}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1-s)^{\alpha-1}}.e^{-u}\,\frac{du}{1-s} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\frac{1}{(1-s)^\alpha}.\int_{0}^{+\infty} u^{\alpha-1}.e^{-u}\,du$.

Soit : $E(e^{s.X}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\frac{1}{(1-s)^\alpha}.\Gamma(\alpha) = \frac{1}{(1-s)^\alpha}$.

D'où, pour $s < 1$: $l_a(s) = a.s - \ln\big(\frac{1}{(1-s)^\alpha}\big) = a.s + \alpha.\ln(1-s)$.

$l'_a(s) = a - \frac{\alpha}{1-s}$, et $l'_a(s) = 0$ si et seulement si : $\frac{\alpha}{1-s} = a$, soit : $s = 1 - \frac{\alpha}{a}$.

Comme α et a sont strictement positifs, on a : $1 - \frac{\alpha}{a} < 1$.

D'où le tableau de variation de l_a.

s	$-\infty$		$1-\frac{\alpha}{a}$		1
$l'_a(s)$		$+$	0	$-$	
l_a	$-\infty$	$\nearrow$	$l_a(1-\frac{\alpha}{a})$	$\searrow$	$-\infty$

- Lorsque s tend vers $-\infty$, $a.s$ tend vers $-\infty$ et $\alpha.\ln(1-s)$ tend vers $+\infty$.

Toutefois, $\alpha.\ln(1-s) \underset{-\infty}{\approx} \alpha.\ln(-s)$, et $\alpha.\ln(-s) = o(a.s)$, par croissances comparées.

Donc : $l_a(s) = a.s - \alpha.\ln(1-s) \underset{-\infty}{\approx} a.s$, et $l_a(s) \underset{s\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

- Lorsque s tend vers 1^-, $a.s$ tend vers a et $\alpha.\ln(1-s)$ tend vers $-\infty$.

$l_a(s) \underset{s\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

8. (i) Les variations de l_a précédentes montrent que l_a admet en $1-\frac{\alpha}{a}$ un maximum absolu égal à :

$h(a) = l_a(1-\frac{\alpha}{a}) = a.(1-\frac{\alpha}{a}) + \alpha.\ln(1-(1-\frac{\alpha}{a}))$.

Soit $h(a) = a - \alpha + \alpha.\ln(\frac{\alpha}{a})$.

$$\boxed{\text{Le maximum de } l_a \text{ qur l'intervalle } I =]-\infty,1[\text{ est : } h(a) = a - \alpha + \alpha.\ln(\tfrac{\alpha}{a})}$$

(ii)

- Supposons $a \neq \alpha$.

On a : $1 - \frac{\alpha}{a} \neq 0$, et les variations de l_a montrent que $h(a) = l_a(1-\frac{\alpha}{a}) > l_a(0)$, soit $h(a) > 0$.

- Si $a = \alpha$, il vient $h(a) = h(\alpha) = 0$.

$$\boxed{\text{Le maximum précédent est } > 0 \text{ si } a \neq \alpha \text{ et nul si } a = \alpha}$$

9\. a) Soit $s \in]0, n[$. D'après la première inégalité du 6. et le 5. c) précédent, il vient :

$E(e^{\frac{S_n}{n}}) \geq e^{a.s}.P(\frac{S_n}{n} \geq a)$, et $E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(\frac{s}{n}))^n$.

D'où : $(\varphi(\frac{s}{n}))^n \geq e^{a.s}.P(\frac{S_n}{n} \geq a)$.

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \geq a) \leq e^{-a.s}(\varphi(\frac{s}{n}))^n}$$

9\. b) Le réel $P(\frac{S_n}{n} \geq a)$ minore donc la fonction : $s \mapsto e^{-a.s}.(\varphi(\frac{s}{n}))^n$ sur l'intervalle $]0, n[$.
On en déduit que celle-ci admet une borne inférieure sur cet intervalle (c'est-à-dire un plus grand minorant), et que :

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \geq a) \leq \inf_{0<s<n}\left[e^{-a.s}.(\varphi(\frac{s}{n}))^n\right]}$$

9\. c) $e^{-a.s}.(\varphi(\frac{s}{n}))^n = \exp\left[-a.s + n.\ln(\varphi(\frac{s}{n}))\right] = \exp\left[-n.(a.\frac{s}{n} - \ln(\varphi(\frac{s}{n})))\right] = \exp\left[-n.l_a(\frac{s}{n})\right]$.

Supposons $a > \alpha$, et posons $\frac{s}{n} = 1 - \frac{\alpha}{a}$.

Cela est possible car $0 < 1 - \frac{\alpha}{a} < 1$, et $s = n.(1 - \frac{\alpha}{a}) \in]0, n[$.

Il vient alors : $e^{-a.s}.(\varphi(\frac{s}{n}))^n = \exp\left[-n.l_a(1 - \frac{\alpha}{a})\right] = e^{-n.h(a)}$.

Remarquons enfin que : $0 < 1 - \frac{\alpha}{a}$, de sorte que : $h(a) = \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}_+} [l_a(t)] = \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}_+} \left[a.t - \ln(\varphi(t))\right]$.

D'où : $P(\frac{S_n}{n} \geq a) \leq e^{-a.s}.(\varphi(\frac{s}{n}))^n = e^{-n.h(a)} = e^{-n. \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}_+}\left[a.t - \ln(\varphi(t))\right]}$.

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \geq a) \leq e^{-n. \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}_+}\left[a.t - \ln(\varphi(t))\right]} = e^{-n.h(a)}}$$

10\. Supposons maintenant $a < \alpha$.
La deuxième inégalité du 6. et le 5.b) donnent cette fois pour $s \leq 0$:

$E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) \geq e^{a.s}.P(\frac{S_n}{n} \leq a)$, et $E(e^{s.\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(\frac{s}{n}))^n$.

D'où : $(\varphi(\frac{s}{n}))^n \geq e^{a.s}.P(\frac{S_n}{n} \leq a)$, et : $P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq e^{-a.s}.(\varphi(\frac{s}{n}))^n$.

De façon analogue à la question précédente, on obtient :

$P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq \exp(-n.l_a(\frac{s}{n}))$.

Remarquons que, dans le cas présent : $1 - \frac{\alpha}{a} < 0$.

En choisissant $s = n.(1 - \frac{\alpha}{a})$, il vient :

$P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq \exp(-n.l_a(1 - \frac{\alpha}{a})) = e^{-n.h(a)}$.

Notons enfin que les variations de l_a donnent : $h(a) = \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}_-} [l_a(t)] = \sup_{t \in \mathbb{R}_-} \left[a.t - \ln(\varphi(t))\right]$.

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq e^{-n. \sup_{t \in \mathbb{R}_-}\left[a.t - \ln(\varphi(t))\right]} = e^{-n.h(a)}}$$

11\. Soit $\varepsilon > 0$.

$P(|\frac{S_n}{n} - \alpha| \geq \varepsilon) = P(\frac{S_n}{n} \leq \alpha - \varepsilon) + P(\frac{S_n}{n} \geq \alpha + \varepsilon)$.

- L'inégalité du 9. c) appliquée avec $a = \alpha + \varepsilon$ donne : $P(\frac{S_n}{n} \geq a + \varepsilon) \leq e^{-n.h(\alpha+\varepsilon)}$.
- L'inégalité du 10. appliquée avec $a = \alpha - \varepsilon$ donne : $P(\frac{S_n}{n} \leq a - \varepsilon) \leq e^{-n.h(\alpha-\varepsilon)}$.

Posons $H(a, \varepsilon) = min(h(\alpha - \varepsilon), h(\alpha + \varepsilon))$.

Il vient : $P(\frac{S_n}{n} \geq a + \varepsilon) \leq e^{-n.H(\alpha,\varepsilon)}$, $P(\frac{S_n}{n} \leq a - \varepsilon) \leq e^{-n.H(\alpha,\varepsilon)}$.

D'où : $P(|\frac{S_n}{n} - \alpha| \geq \varepsilon) \leq 2.e^{-n.H(\alpha,\varepsilon)}$.

$$\boxed{P(|\frac{S_n}{n} - \alpha| \geq \varepsilon) \leq 2.e^{-n.H(\alpha,\varepsilon)}}$$