Cahier de vacances

François Delaplace
Professeur de mathématiques, lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles).

Après une année studieuse passée en classe préparatoire, il est bien légitime de penser enfin à se reposer, mais prudence ! Réservons-nous quelques jours des vacances – disons les quinze derniers – pour faire le point sur nos connaissances. Est-ce vraiment nécessaire ? Réponse dans ce qui suit :

Oubliez tout, partez en vacances et si, vers le 15 août, vous êtes capable de répondre correctement au petit test suivant, alors vous êtes prêt pour la rentrée. Mais si vous vous trompez sur un certain nombre de questions ou si certaines vous sont complètement (devenues ?) étrangères, il est temps de vous y remettre.

Vous trouverez dans les pages qui suivent, de quoi vous aider à vous remettre dans l'ambiance, en pensant à ce qui vous attend.

Quelques passages ou exercices complets, par les connaissances qu'ils sollicitent, sont à considérer comme réservés aux candidats "voie scientifique". Ils sont repérés par le symbole (certes excessif !) " 💣 ".

Les énoncés du QCM et des exercices figurent sur fond grisé. Les corrigés suivent directement les exercices tandis que les réponses au QCM figurent en toute fin d'article.

F. D.

QCM

	Propositions	V	F
1	Pour qu'une suite soit convergente, il faut qu'elle soit bornée		
2	Pour qu'une suite soit convergente, il suffit qu'elle soit bornée		
3	Il existe des suites monotones non convergentes.		
4	Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente définie par son premier terme $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, alors la fonction f est bornée.		
5	Si f est une fonction croissante sur un intervalle $]a, b[$ alors f a une limite, éventuellement infinie en b		
6	Si f est une fonction bornée sur $]a, b[$ alors elle admet des limites finies en a et en b.		
7	Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x on ait $f(x+1) = f(x)$, alors f est croissante		
8	Si une fonction f est bornée sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f est		

	bornée sur $[a, b[$		
9	Si f est continue sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f est continue sur $[a, b[$		
10	Si f a des primitives sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f a des primitives sur $[a, b[$		
11	Si f est intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$		
12	Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite λ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$		
13	Si (u_n) est une suite majorée par un réel a, alors la série $\sum u_n$ est majorée par le réel a.		
14	Si $\sum u_n$ est une série convergente, la série $\sum (-1)^n u_n$ est aussi convergente.		
15	Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $Ker(f) = Ker(g)$ et $Im(f) = Im(g)$. On a nécessairement $f = g$		
16	Si X est une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors la variable $\|X\|$ a aussi une espérance		
17	Il existe des fonctions de répartition décroissantes		
18	Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p et si Y suit une loi binomiale de paramètres n et q, alors, si X et Y sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p + q$.		
19	Si f et g sont des applications linéaires telles que fog est l'application nulle, alors gof est l'application nulle		
20	Soit n un entier supérieur à 1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ?		
21	Si N est une matrice carrée d'ordre $n > 1$ telle que $N^2 = N$, alors $\mathrm{rg}(N) = n$		
22	Si N est une matrice carrée d'ordre n telle que $N^2 = N$ et si $\mathrm{rg}(N) = n$ alors $N = I$.		
23	Il existe des matrices carrées N d'ordre $n > 1$ telles que N^2 soit non nulle et ne possède que des termes négatifs		
24	Si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = I$, alors BA est-il aussi égal à I ?		
25	Si A est une matrice carrée, symétrique et inversible, son inverse est symétrique ?		

Exercice 1 (d'après ESSEC 1990)

Partie I

1 a) On considère la fonction définie pour tout réel positif x par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x)$$

Calculer $f'(x)$ étudier f et tracer sa courbe représentative.

b) En déduire successivement que :

(1) $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$; (2) $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^3}{6}$

2) Soient n , p , k des entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que :

(3) $\dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{2(k-1)^2} - \dfrac{1}{2k^2}$

b) Déduire des résultats qui précèdent l'inégalité suivante :

(4) $0 \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} f\left(\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{12(n-1)^2}$

3) On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

A cet effet, on introduit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par

$$v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

a) Etablir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

b) En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , et prouver qu'elles sont adjacentes (on rappelle que deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, la différence des deux ayant pour limite 0).

4) On note γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) et, pour donner une méthode d'évaluation numérique de γ , on se propose d'utiliser la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n :

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$$

a) Prouver l'inégalité suivante:

$$|m_n - g| \leqslant \frac{1}{2n}$$

b) Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné.

5) On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$ à l'aide de l'ensemble des résultats précédents.

a) Comparer $f(\frac{1}{k})$ et $m_{k+1} - m_k$

b) Déduire de l'inégalité (4) que, si n et p sont deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2$ alors on a :

$$0 \leqslant m_{n+p} - m_n \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}$$

Quel encadrement de γ en déduit-on en faisant tendre p vers l'infini ?

Partie II

On considère une urne remplie de n boules $(n \geqslant 1)$ numérotées respectivement $1,2,\ldots,n$. On extrait ces n boules, une à une et sans remise, et l'on désigne par $Z_1, Z_2,\ldots, Z_n$ les variables aléatoires indiquant, dans cet ordre, les numéros des boules ainsi obtenues.

Pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note d'autre part X_p la variable aléatoire indiquant le plus grand des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, autrement dit: $X_p = \sup(Z_1, Z_2,\ldots, Z_p)$.

1) On se propose de déterminer $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leqslant n$. On pose $\mathbb{N}_n = \{1,..,n\}$. On demande de préciser:

a) le nombre de parties A à p éléments choisis dans l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

b) le nombre de suites composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

c) le nombre de suites $(a_1, a_2,\ldots,a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

d) le nombre de suites $(a_1, a_2,\ldots,a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, et telles que le plus grand des p éléments soit situé en $p^{\text{ème}}$ position.

e) le nombre de suites $(a_1, a_2,\ldots,a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en $p^{\text{ème}}$ position.

f) la probabilité $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leqslant n$.

2) Pour $1 < p \leqslant n$, on note B_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 1 si l'événement $Z_p > X_{p-1}$ est réalisé, et 0 sinon.

a) On suppose dans cette question et dans cette question seulement que $p = 8$, et que les valeurs successives de $Z_1, Z_2,\ldots, Z_8$ sont respectivement 5, 3, 6, 2, 4, 7, 8, 1.

Donner, pour $1 < p \leqslant n$ les valeurs correspondantes des variables X_p et B_p .

b) Montrer que l'espérance de B_p est égale à $1/p$, et donner l'expression et l'interprétation de $E(B_2 + B_3 + \cdots + B_n)$.

3) On considère l'algorithme suivant, dans lequel toutes les variables sont de type entier, et où l'on a affecté un entier supérieur à 1 à la variable n , et les entiers $1,2,\ldots,n$ dans un ordre quelconque aux variables $Z[1], Z[2],\ldots, Z[n]$:

```
begin
X := Z[1];
for p:=2 to n do
    if Z[p] > X then X := Z[p];
end;
```

a) Indiquer les valeurs successivement prises par X au cours de l'algorithme :

- d'une part lorsque $Z[1] = 1, Z[2] = 2,\ldots, Z[n] = n$.
- d'autre part lorsque $Z[1] = n, Z[2] = n-1,\ldots, Z[n] = 1$.

b) On revient au cas général. Indiquer la valeur contenue dans la variable X à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre de comparaisons $(>)$ effectuées entre les valeurs des deux variables ainsi que le nombre maximal et le nombre minimal d'affectations $(:=)$ effectuées pour les valeurs de X.

c) A l'aide des résultats précédents, exprimer l'espérance E_n du nombre d'affectations effectuées au cours de l'algorithme en fonction de u_n , puis expliciter à l'aide du nombre γ des réels a et b tels que l'on ait:

$$E_n = a\ln(n) + b + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \qquad \lim_n \varepsilon_n = 0$$

Indications

Partie I

1 a) L'étude de la fonction se fait sans difficulté. On notera cependant que

$$\frac{x}{2(1+x)} \underset{+\infty}{=} \circ(x) \qquad \text{et que} \qquad \ln(1+x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{2}} = 1$$

La courbe de f admet au moins une branche parabolique. Le correcteur est sensible à l'allure générale de la courbe et attache une attention aux points particuliers (ici, le point d'abscisse $x = 0$).

b) Si vous ne vous êtes pas trompé dans le calcul de la dérivée, la première inégalité est évidente ; la seconde s'obtient par intégration.

2 a) Quand vous devez utiliser un théorème, vérifier soigneusement les hypothèses.

b) On utilise les inégalités (2) et (3).

3 a) Question classique ; Existe-t-il encore des candidats aux concours qui ne savent pas la faire les yeux fermés ?

b) On montre que les deux suites sont adjacentes en vérifiant la croissance de l'une, la décroissance de l'autre et la limite de leur différence ; bref, on vérifie les hypothèses d'une propriété ou d'un théorème.

4 a) Démontrer que $|X| \le a$ équivaut à montrer que $a \le X \le a$

On utilise la question précédente.

b) Quand on vous demande un algorithme, vous devez donner les instructions clés. Inutile de vous lancer dans des présentations (sur écran virtuel) des saisies des données ou de la sortie des données traitées.

5) Exprimer m_k en fonction de u_k .

Partie II

1) C'est du cours. Profitez-en pour revoir les formules usuelles de dénombrement.

Rappelons qu'une probabilité est le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas total.

2 a) Faire un tableau à 4 lignes : une pour p et une pour chacune des trois variables ; on remarquera que B_p prend la valeur 1 chaque fois que le n° obtenu est supérieur à tous ceux qui le précède. On peut parler de "record battu" ; la somme des variables B_p comptabilise donc le nombre de records battus.

b) La variable B_p suit une loi de Bernoulli (pourquoi au fait ?). En utilisant la question 1 f) précédente, on montre que son paramètre est $1/p$. On utilise la propriété suivante :

"L'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances de ces variables".

3 c) Pour cette dernière question, on utilisera la variable B_p de la seconde question ainsi que la troisième question de la première partie

Exercice 1 : corrigé

Partie I

La fonction f définie sur $[\,0, \infty\,[$ par :

$$f(x) := \frac{x}{2} + \frac{x}{2\cdot(1+x)} - ln(1+x)$$

est clairement de classe C^1 sur son ensemble de définition comme somme et composition de fonctions de classe C^1. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2} \ge 0$$

On a le tableau de variation de f suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Par ailleurs,

$$\frac{f(x)}{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{ln(1+x)}{x}$$

Comme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}$$

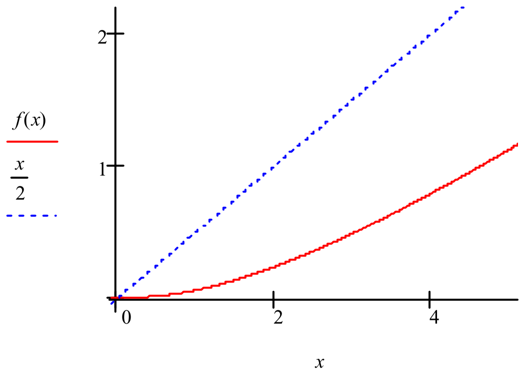
et que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{x} = 0\ , \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x} = 1$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = 0$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction $y = \frac{x}{2}$. On a la représentation graphique suivante de la fonction f en trait plein, et de sa branche infinie $y = \frac{x}{2}$ en pointillé:



Pour tout réel x positif, on a :

$$0 < \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$$

donc

$$(1) \qquad 0 \leq f''(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

puis, en intégrant la fonction f' sur l'intervalle $[0, x]$, les bornes étant dans le bon sens,

$$(2) \qquad 0 \leq f(x) - f(0) \leq \int_0^x \frac{t^2}{2}\, dt = \frac{x^3}{6}$$

On considère la fonction φ définie sur $[k-1, k]$ par $\varphi(x) = \frac{-1}{2x^2}$ pour $k \geq 2$. La fonction φ étant de classe C^1 sur $[k-1, k]$ (laissé au bon soin du lecteur), les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis sont vérifiées ; comme

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^3}$$

fonction décroissante sur $[k-1, k]$, on en déduit que

$$\varphi'(k)\cdot[k-(k-1)] \leq \varphi(k) - \varphi(k-1)$$

et donc :

$$(3) \qquad \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}$$

D'après l'inégalité (2), on peut écrire :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{6\cdot k^3}$$

D'après l'inégalité (3), on a :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{6\cdot k^3} \leq \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=n}^{n+p-1}\left[\frac{1}{2\cdot(k-1)^2} - \frac{1}{2\cdot k^2}\right]$$

Rappelons la propriété suivante connue sous le nom de principe des dominos :

Pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m}\left(w_{k+1} - w_k\right) = w_{n+m+1} - w_n$

On obtient alors immédiatement en changeant les signes, la relation :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{6\cdot k^3} \leq \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot(n-1)^2} - \frac{1}{2\cdot(n+p)^2}\right]$$

Comme pour tout entier naturel p, $\dfrac{-1}{2\cdot(n+p)^2} \leq 0$, on en déduit :

$$(4) \qquad \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{6\cdot k^3} \leq \frac{1}{12\cdot(n-1)^2}$$

Et voici une suite que personne ne peut ignorer, car posée au moins 4583 fois (j'en ai certainement oublié), la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$$

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction g définie sur $[n, n+1]$ par $g(t) = \dfrac{1}{t}$ étant décroissante (et intégrable car continue)

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dt$$

et donc,

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{n} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{n+1} \leq ln(n+1) - ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)\right)$$

Après réduction ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (ln(n+1) - ln(n))$$

D'après l'inégalité de la question précédente, on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Il s'ensuit que la suite (u_n) est une suite décroissante. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$$

Soit,

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} - u_n\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - (ln(n+1) - ln(n))$$

Là encore, la question précédente permet de conclure :

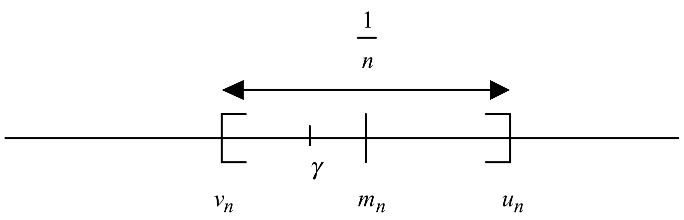
$$v_{n+1} - v_n \geq 0$$

et donc la suite (v_n) est croissante.

De plus, d'après l'énoncé, $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$; on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(u_n - v_n\right) = 0$.

On peut donc conclure que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite, ont même limite γ.

Un dessin permet de vérifier la relation qu'on nous demande de prouver. La distance de u_n à v_n est égale à $\frac{1}{n}$; donc la distance de m_n à u_n ou à v_n est de $\frac{1}{2n}$. Comme, par ailleurs, γ est compris entre u_n et v_n, on " voit" que la distance de m_n à γ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2n}$.



Vous voulez une *vraie* démonstration ? Ok. D'abord (u_n) est décroissante et convergente vers γ; donc, pour tout n, $\gamma \le u_n$; ensuite, (v_n) est croissante ; donc, pour tout n, $\gamma \ge v_n$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$v_n \le \gamma \le u_n \quad \Rightarrow \quad -u_n \le -\gamma \le -v_n$$

D'où :

$$m_n - u_n \le m_n - \gamma \le m_n - v_n$$

Or $m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$, donc, après réduction :

$$\frac{-u_n + v_n}{2} \le m_n - \gamma \le \frac{u_n - v_n}{2}$$

En remarquant que $\frac{u_n - v_n}{2} = \frac{1}{n}$, on peut écrire $|m_n - \gamma| \le \frac{1}{2 \cdot n}$

Pour le calcul de m_n, on notera que

$$(5) \qquad m_n = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + u_n - \frac{1}{n} \right) = u_n - \frac{1}{2 \cdot n}$$

soit, après réduction :

$$m_n = 1 + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - ln(n)$$

D'où le programme :

```
program essec_E_90;

var
        k, n       : integer;
        m          : real;

Begin
m:=0 ;
write('valeur de n superieure ou egale à 1 :') ; readln(n) ;
If  n = 1  then writeln ('la valeur de m est 1') else
        begin
        For  k: = 1  to  n -1 do   m := m + 1/k ;
        writeln('la valeur de m est : ',  m + 1/(2*n) - ln(n)) ;
        end ;
End.
```

En le faisant tourner, on obtient pour $n = 5$: $m_5 = 0.5738954$ puis pour $n = 50$: $m_{50} = 0.5771823$. D'après la question précédente, les valeurs de m_5 et de m_{50} sont des valeurs approchées de γ à 0,1 et à 0,01 près. Les résultats obtenus semblent indiquer que m_5 est déjà une approximation de γ à au moins 0,01 près.

D'après ce qui vient d'être dit, la majoration obtenue au cours de la question 4 de $|m_n - \gamma|$ n'est certainement pas la meilleur ; on comprend bien qu'on doit pouvoir l'améliorer.
Calculons :

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2 \cdot k} + \frac{1}{2 \cdot k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)} - ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2 \cdot (k+1)} - ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

et en utilisant la relation (5) de la question précédente :

$$m_{k+1} - m_k = (u_{k+1} - u_k) - \left[\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k}\right]$$

$$m_{k+1} - m_k = \frac{1}{k+1} - ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2 \cdot k \cdot (k+1)} = \frac{1}{2 \cdot k} + \frac{1}{2 \cdot (k+1)} - ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Il en résulte que

$$m_{k+1} - m_k = f\left(\frac{1}{k}\right)$$

En utilisant le principe des dominos,

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(m_{k+1} - m_k\right) = m_{n+p} - m_n$$

La relation (4) de la question 2 permet de conclure :

$$0 \le m_{n+p} - m_n \le \frac{1}{12\cdot(n-1)^2}$$

Cette relation est valable pour tout entier naturel p, donc pour p aussi grand qu'on veut ; on a donc, à la limite, quand p tend vers $+\infty$,

$$0 \le \gamma - m_n \le \frac{1}{12\cdot(n-1)^2}$$

On s'en doutait, l'approxiamtion de m_n obtenue est bien meilleur que ce qu'on avait trouvé dans la question précédente.

Par exemple,

$$0 \le \gamma - m_5 \le \frac{1}{192}$$

ce qui implique que m_5 est plus petit que γ et que les deux premières décimales sont exactes.

Partie II

Le nombre de parties A à p éléments d'un ensemble à n éléments est le nombre de combinaisons de p parmi n. C'est donc $\binom{n}{p}$

Le nombre de p-suites composées des p éléments distincts de l'ensemble A (ayant p éléments) est $p!$.

Le nombre des p-suites composées de p éléments distincts d'un ensemble à n éléments est égale au produit du nombre de choix de la partie A par le nombre de suites qu'on peut former avec chacune de ces parties ; c'est donc

$$p!\cdot\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Le nombre de p-suites composées des p éléments distincts de l'ensemble A (ayant p éléments) et telles que le plus grand élément se trouve en dernière position est une permutation des $p-1$ autres éléments de A. C'est donc $(p-1)!$.

Le nombre des p-suites composées de p éléments distincts d'un ensemble à n éléments et telles que le plus grand élément soit en dernière position s'obtient en effectuant le produit du nombre de choix de la partie A à p éléments par le nombre de p-suites qu'on peut former . C'est donc : $\binom{n}{p}\cdot(p-1)!$

L'épreuve consiste à extraire successivement p éléments d'un ensemble à n éléments et les placer dans l'ordre d'apparition. Il y a donc

$$p!\cdot\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

cas possibles. Une réalisation de l'événement $\left(Z_p > X_{p-1}\right)$ est une p-suite composée de p éléments distincts d'un ensemble à n éléments et telles que le plus grand élément soit en dernière position ; le nombre de cas favorables à cet événement est : $\binom{n}{p}\cdot(p-1)!$

Ainsi :

$$p\left(Z_p > X_{p-1}\right) = \frac{\binom{n}{p}\cdot(p-1)!}{\binom{n}{p}\cdot p!} = \frac{1}{p}$$

On a le tableau suivant :

p	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_p	5	3	6	2	4	8	9	1
X_{p-1}	✖	5	5	6	6	6	8	9
B_p	✖	0	1	0	0	1	1	0

La variable B_p est une variable de Bernoulli ; on l'appelle souvent 'compteur' en ce sens que $\sum_p B_p$ compte le nombre de fois où le n° sorti est plus grand que tous ceux qui précèdent.

Revenons au cas général. Les variables B_p (pour tout p compris entre 2 et n) sont des variables de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(Z_p > X_{p-1})$ est réalisé. D'après la question 1.f ,

$$p(B_p = 1) = p(Z_p > X_{p-1}) = \frac{1}{p}$$

Il s'ensuit que toutes les variables B_p suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{p}$; leur espérance commune est donc $\frac{1}{p}$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(B_2 + B_3 + ... + B_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Cette espérance représente le nombre moyen de fois où le dernier n° sorti est supérieur à ceux qui précèdent.

Si la suite $(Z[p])$ est une suite strictement croissante, alors X change de valeur à chaque nouvelle valeur de p ; on aura donc, X qui prendra successivement les valeurs $1, 2, ..., n$.

Si $Z[1] = n$, X prend d'abord cette valeur, puis ne change plus car toutes les autres valeurs de $Z[p]$ lui sont inférieures.

A la fin de l'algorithme, $X = max(Z[1], Z[2], \dots, Z[p]) = n$.

On compare X à chacune des valeurs de $Z[p]$; il y a en tout $n-1$ comparaisons puisque p démarre à 2.

Le nombre d'affectations de valeurs à X est au plus n, en donnant d'abord à X la valeur 1, puis en attribuant une nouvelle valeur à X à chaque comparaison ; c'est le premier cas étudié ci-dessus.

Le nombre d'affectations de valeurs à X est au moins 1, en donnant d'abord à X la valeur n ; c'est le second cas étudié ci-dessus.

Notons B_1 la variable certaine égale à 1 qui correspond à l'affectation initiale (donc à une première affectation) de la variable X ; pour $p \geq 2$, le nombre de changement de valeur de X à la $p^{ème}$ comparaison est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli et qui prend la valeur 1 si, et seulement si, $(Z_p > X_{p-1})$ est réalisé. C'est donc la variable B_p.

L'espérance, ou nombre moyen d'affectations de la variable X, est

$$E(B_1 + B_2 + ... + B_n) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

D'après la question 3 de la partie 1, on a :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = u_n + ln(n)$$

En se rappelant que la suite (u_n) est convergente de limite γ, on peut écrire :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \gamma + \varepsilon_n + ln(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$$

et donc $a = 1$ et $b = \gamma$.

Question supplémenaire

On a montré au cours de la première partie que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$$

est convergente. Plus généralement, démontrer que si f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, alors la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,dt$$

est convergente

Corrigé

Pour tout entier naturel k non nul, pour tout réel t appartenant à $[k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

car la fonction f est décroissante. En intégrant sur l'intervalle $[k, k+1]$, on a :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

Soit n un entier naturel non nul ; en sommant l'inégalité de gauche de 1 à $n-1$ et celle de droite de 1 à n,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \int_1^n f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

On obtient donc :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^n f(t)\,dt + \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

En rajoutant $f(1)$ dans les deux membres de la première inégalité et en remarquant que la positivité de la fonction entraine

$$\int_1^n f(t)\,dt + \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq \int_1^n f(t)\,dt$$

on peut alors écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(t)\,dt + f(1) \quad \text{et} \quad \int_1^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

et finalement :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,dt \leq f(1)$$

ce qui implique que la suite (u_n) est bornée.

Par ailleurs :

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

On a vu que la décroissance de la fonction sur tout segment $[n, n+1]$ impliquait que

$$f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

Bilan : on a vu ci-dessus que la suite (u_n) était bornée et en particulier minorée par 0; on vient de montrer qu'elle est aussi décroissante ; donc elle est convergente vers une limite l comprise entre 0 et $f(1)$.

Exercice 2

On considère le programme suivant :

```
program reference_2006;

var
      a, c : integer;

Begin
c := 0 ;
readln(a) ;  readln(b) ;
      if a = 0 then  if c = 0 then c := 1
                else c := 2 ;
      Writeln('c= ',c);
End.
```

Quelles sont les valeurs de la variable c à l'issue du programme lorsqu'on a donné à a les valeurs suivantes :

$a = 0$ puis $a = 1$

Exercice 2 : corrigé

Les valeurs de la variable `c` sont successivement 1 et 0 et non pas, comme la structure écrite pourrait le laisser penser, `1` et `2` .
En effet, le programme Pascal ne voit pas notre papier et ne peut donc pas se laisser abuser par la présentation. En écrivant :

```
if a = 0 then  if c = 0 then c := 1
               else c := 2 ;
```

on se force à croire que si `a=0` alors une certaine instruction (`if c = 0 then c := 1`) sera effectuée (c'est-à-dire, en fait que si on donne à `a` la valeur `0`, alors `c` prendra la valeur `1`), tandis que si on donne à `a` une valeur autre que 0, alors `c` prendra la valeur `2`. En fait, il n'en est rien; Pascal lira :

```
if a = 0 then
               if c = 0 then c := 1 else c := 2 ;
```

Compte tenu du fait que la condition "`c = 0`" est toujours vrai, `c` ne prendra jamais la valeur `2` ; de plus, si on affecte pas à `a` la valeur 0, alors Pascal saute à l'instruction suivante, et donc écrit la valeur initialement donnée à `c`, c'est-à-dire 0.

Mais alors, comment modifier notre programme pour que Pascal donne à `c` respectivement les valeurs `1` et `2` ?
En calcul algébrique, on vous a dit "pour regrouper des termes entre eux dans vos expressions, mettez des parenthèses" ; et bien, en Pascal, c'est pareil. Pour regrouper des instructions, on les encadrent par begin … end ; concrètement, pour que Pascal donne à `c` respectivement les valeurs `1` et `2`, on écrit :

```
program reference_2006;

var
        a, c : integer;

Begin
        c := 0 ;
        readln(a) ;  readln(b) ;
        if a = 0 then
                begin
                        if c = 0 then c := 1
                end
                else c := 2 ;
        Writeln('c= ',c);
End.
```

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

1. Donner l'ensemble de définition I de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f sur I.
2. Etudier les variations de f sur I.
3. Donner le tableau de variation et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormée, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
4. Montrer que f est une bijection de I dans un intervalle $f(I)$ qu'on précisera. Donner les variations de f^{-1} et tracer sa courbe représentative C' dans le même repère que C.
5. Calculer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f. En déduire que quel que soit l'entier naturel n, u_n est un élément de $[0, 1]$.
7. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
8. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

Indications

1. Attention aux inégalités : le radicande (expression sous le symbole de la racine carrée) est toujours positif ; je n'ai pas dit "strictement positif".
   On pourra faire un tableau de signes pour l'ensemble de définition.
   La continuité de la fonction doit être rédigée en deux lignes tout au plus. Attention à la dérivabilité : une fonction racine carrée n'est pas forcément dérivable pour les valeurs de la variable qui annule le radicande.
2. Revoyez si nécessaire les formules des dérivées. Elles sont à connaître par cœur.
3. Tracer la courbe de f avec soin ; le correcteur sera sensible à l'allure générale et aux points particuliers. Dans la première question, vous avez étudié la dérivabilité de la fonction en 0 ; le résultat de votre étude doit figurer sur votre représentation graphique ; on remarquera que la droite d'équation $y = x$ est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
4. Pas de catalogue ; on utilise un théorème en en vérifiant les hypothèses. Quelles sont les hypothèses du théorème de la bijection ? Il ne s'agit pas seulement de les énoncer ; faut-il encore que vous les ayez déjà prouvées. Si ce n'est pas le cas, revoyez les questions précédentes : si vous avez dit que la fonction f est croissante dans la question 2, vous ne devez pas dire "la fonction f est strictement croissante …"
   On ne vous demande pas dans cette question de donner l'expression de la fonction réciproque. Utilisez les théorèmes du cours.
5. Rien à signaler sur cette question. Faites le calcul.
6. On dit qu'un intervalle I est stable par une fonction f si, pour tout x de I, $f(x)$ est un élément de I.
7. Une récurrence rapide est la bienvenue, mais ne pas dire "Par une récurrence immédiate, …"
8. Pour finir, deux théorèmes. Enoncer soigneusement les hypothèses et démontrer-les si ce n'est pas déjà fait.

Bilan : c'est un exercice sans difficulté ; il convient seulement de faire preuve d'un minimum de rigueur et de soin dans la rédaction ; il permet de faire le point sur l'étude des fonctions (continuité, dérivabilité en un point, courbe), sur les bijections (théorèmes et représentation graphique) et sur les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Bref, tout ce qu'un étudiant de fin de première année doit savoir faire en analyse.

Exercice 3 : corrigé

Soit

$$f(x) := \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

1) <u>Ensemble de définition I</u>
On a le tableau de signes suivant

x	$-\infty$		0		2		∞
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

il s'ensuit que f est définie si, et seulement si, $x \in [\,0,\ 2\,[$. On a donc $I = [\,0,\ 2\,[$.

<u>Continuité de f sur I.</u>
La fonction f est la racine carrée d'une fonction rationnelle (donc continue sur son ensemble de définition). Il s'ensuit que f est continue sur I.

<u>Dérivabilité de f sur I.</u>
La fonction f est la racine carrée d'une fonction rationnelle (donc dérivable sur son ensemble de définition). Il s'ensuit que f est dérivable en tout point de I où la fonction ne s'anulle pas.Elle est donc déjà dérivable sur $]\,0,\ 2\,[$. Etudions la dérivabilité de f en 0.

On a, pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x\cdot(2-x)}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x\cdot(2-x)}} \to \infty$$

Il en résulte que la fonction n'est pas dérivable en 0 et que la courbe de f admet au point d'abscisse $x = 0$ une demi-tangente verticale.

2) <u>Variations de f.</u>
Pour tout réel x élément de I,

$$f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

La fonction f' étant strictement positive sur $]\,0,\ 2[$, la fonction f est strictement croissante sur $]\,0,\ 2\,[$; de plus, elle est continue en 0, donc elle est strictement croissante sur I.

3) <u>Courbe C de f.</u>
Pour tracer la courbe de f, on a aussi besoin des limites de f aux bornes de I ; on ait déjà que f est continue en 0 ; calculons sa limite en 2 :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \to \infty$$

D'où le tableau de variations :

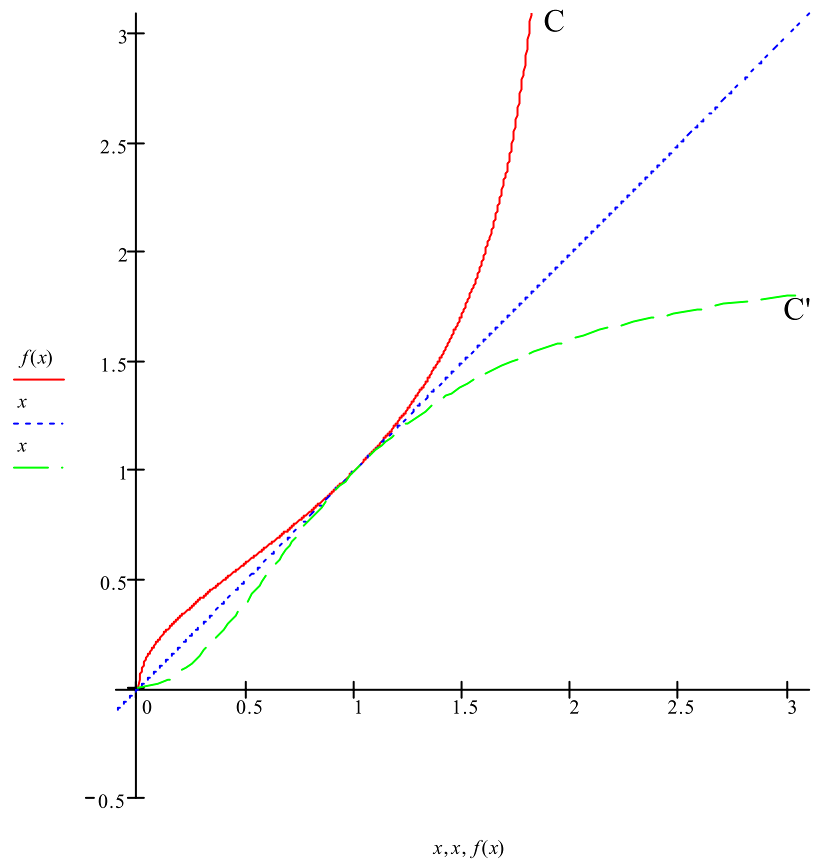
x	0		2
$f'(x)$	∞	$+$	$\|\|$
f	0	$\nearrow$	∞

On en déduit immédiatement la courbe de f.
Représentation graphique, page suivante.

4) <u>Bijection</u>
La fonction f est continue et strictement monotone sur $I = [\,0,\ 2\,[$; elle réalise donc une bijection de I dans $f(I)$; l'étude faite précédemment montre que $f(I) = [\,0, +\infty\,[$.

Une fonction et sa réciproque ont les mêmes variations ; donc f^{-1} et f ont les mêmes variations ; elles sont donc toutes les deux strictement croissantes.

La courbe C' de f^{-1} est la symétrique de C par rapport à la droite d'équation $y = x$; d'où la représentation graphique (page suivante).



5) Pour obtenir la fonction réciproque, on résout l'équation $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$ d'inconnue x.

On élève les deux membres au carré et on transpose les "x" dans le premier membre ; on obtient:

$$x = 2\cdot\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)}$$

Ainsi la fonction réciproque s'écrit pour tout réel x positif :

$$f^{-1}(x) = 2\frac{x^2}{1+x^2}$$

Etude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

6) Stabilité de l'intervalle $[0, 1]$ par f.

On a montré (question 2) que la fonction f est une fonction croissante sur I donc sur $[0, 1]$. Par ailleurs $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$; la fonction f étant continue sur I, donc sur $[0, 1]$, on en déduit que $f([0, 1]) = [0, 1]$.

Par récurrence ; d'abord, $u_0 \in [0, 1]$; en utilisant le fait que la fonction f est croissante sur $[0, 1]$, on a l'implication $u_n \in [0, 1] \Rightarrow u_{n+1} \in [f(0), f(1)]$; c'est à dire qu'on a l'implication $u_n \in [0, 1] \Rightarrow u_{n+1} \in [0, 1]$.Il s'ensuit que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 1]$.

7) Monotonie de (u_n).

Par récurrence ; d'abord, le calcul de u_1 nous montre que $u_0 \le u_1$ (en effet, on touve $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; de la relation $\sqrt{3} \le \sqrt{4} = 2$, on en déduit que $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \ge \dfrac{1}{2}$).

De la croissance de f sur $[0, 1]$, on en déduit l'implication :

$$u_n \le u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \le f(u_{n+1})$$

c'est à dire :

$$u_n \le u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \le u_{n+2}$$

Il en résulte que la suite (u_n) est croissante.

8) Convergence et limite de (u_n).

La suite est croissante (question précédente) et majorée (question antépénultième). On en déduit que la suite est convergente. Soit l sa limite ; de la stabilité de l'intervalle $[0, 1]$ par f, on en déduit que l appartient à $[0, 1]$. Enfin la fonction est continue sur $[0, 1]$ donc en l. D'après le théorème du point fixe, on peut en conclure que l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Un calcul immédiat donne deux valeurs possibles de l ; soit $l = 0$ soit $l = 1$. La suite étant croissante et son premier terme étant égal à $\frac{1}{2}$, on en déduit que (u_n) converge vers 1.

Question supplémenaire

Nous avons dit dans la deuxième question :

"La fonction f' étant strictement positive sur $]0, 2[$, la fonction f est strictement croissante sur $]0, 2[$; de plus, elle est continue en 0, donc elle est strictement croissante sur I."

Démontrer les deux propriétés suivantes :

1) Si f est croissante sur $]a, b]$ et si elle est continue en a alors elle est croissante sur le segment $[a, b]$.

2) Si f est strictement croissante sur $]a, b]$ et si elle est continue en a alors elle est strictement croissante sur le segment $[a, b]$.

3) Remplacer ci-dessus, croissante par décroissante

Corrigé

1) Soit x un élément quelconque de $]a, b]$; pour tout réel y tel que $a < y \le x$, on a :

$$f(y) \le f(x)$$

la fonction f étant continue en a, on peut écrire :

$$\lim_{y \to a^+} f(y) \le f(x)$$

et donc $f(a) \le f(x)$, ce qui montre que si f est croissante sur $]a, b]$ et si elle est continue en a alors elle est croissante sur le segment $[a, b]$.

2) On ne peut pas utiliser la même méthode car les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite.

Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]a, b]$; on veut montrer que $f(a) < f(x)$.

Ayons l'idée de reprendre le raisonnement ci-dessus, plus pour $a < y \le x$, mais pour

$$a < y \le b \qquad \text{avec} \qquad b = \frac{a+x}{2}$$

On a $b < x$ et la croissance stricte de la fonction permet d'écrire $f(b) < f(x)$

La continuité de f en a, justifie comme ci-dessus l'existence de la limite de f en a, et on a :

$$\lim_{y \to a^+} f(y) \le f(b) < f(x)$$

Cette dernière inégalité reste stricte car b est fixé, je veux dire, qu'il ne dépend pas de y.

3) On remplace croissante par décroissante.

Soit x un élément quelconque de $]a, b]$; pour tout réel y tel que $a < y \le x$, on a :

$$f(y) \ge f(x)$$

la fonction f étant continue en a, on peut écrire :

$$\lim_{y \to a^+} f(y) \ge f(x)$$

et donc $f(a) \ge f(x)$, ce qui montre que si f est décroissante sur $]a, b]$ et si elle est continue en a alors elle est décroissante sur le segment $[a, b]$.

De même que ci-dessus :

Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]a, b]$; on veut montrer que $f(a) > f(x)$.

Pour

$$a < y \le b \qquad \text{avec} \qquad b = \frac{a+x}{2}$$

On a $b < x$ et la décroissance stricte de la fonction permet d'écrire $f(b) > f(x)$

La continuité de f en a, justifie comme ci-dessus l'existence de la limite de f en a, et on a :

$$\lim_{y \to a^+} f(y) \ge f(b) > f(x)$$

Cette dernière inégalité reste stricte car b ne dépend pas de y.

Exercice 4 (HEC 1991 E2)

L'objet du problème est une étude de gain associé à un jeu de pile ou face. La première partie permet d'établir quelques résultats liminaires d'analyse ; la seconde partie étudie la stratégie d'un joueur. Dans tout ce problème, on désigne par x un nombre réel appartenant à $]0,1[$.

Partie I

1) Pour tout nombre entier naturel n , on pose : $s(n, 0) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

   Calculer $s(n, 0)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Pour tout entier naturel n , on pose : $s(n,1) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$

   a) Exprimer $(1-x)s(n,1)$ à l'aide de $s(n, 0)$ et en déduire la limite de $s(n,1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) Retrouver ce résultat à l'aide de la dérivation.

3) Plus généralement, pour tout couple (n,r) de nombres entiers naturels, on pose :

$$s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} x^k$$

   a) On suppose que n et r sont non nuls. On rappelle que, pour tout nombre entier naturel non nul k :

$$\binom{r+k}{r} - \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{r-1}$$

   En déduire que :

$$(1-x)s(n,r) = s(n,r-1) - \binom{n+r}{r} x^{n+1}$$

   b) Déterminer les limites des suites de termes généraux

$$n^r x^n \qquad \text{et} \qquad \binom{n+r}{r} x^n$$

   lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire par récurrence que, lorsque n tend vers $+\infty$, $s(n,r)$ tend vers la limite :

$$s(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} .$$

   c) Soit y un nombre réel strictement positif. Déterminer suivant la valeur de y la nature de la série de terme général $\binom{r+k}{r} y^k$, le nombre r étant fixé.

Partie II

On désigne par n et N des nombres entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir face est x . Les jets sont supposés indépendants. On désigne enfin par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets, par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la n^{eme} fois.

A

1) Préciser la loi de S_n . Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

2) Préciser la loi de T_1 . Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

3) L'objet de cette question est de calculer l'espérance et la variance de T_r . Soient k un nombre entier naturel et r un nombre entier naturel non nul.

   a) Montrer que l'événement $\{T_r = k + r\}$ est réalisé si et seulement si les événements $\{S_{k+r-1} = r - 1\}$ et "pile est obtenu au $(k+r)^{eme}$ jet" le sont. En déduire la loi de T_r . Vérifier que la somme des probabilités des événements $\{T_r = k + r\}$, où $k \in \mathbb{N}$, est égale à 1 .

   b) Calculer l'espérance de T_r en utilisant la limite $s(r)$ de la suite $s(n,r)$ introduite dans la **partie I**.

   c) Calculer de même $E(T_r^2) + E(T_r)$. En déduire la variance de T_r .

B

On décide que le jeu s'arrête dès que soit pile, soit face a été obtenu pour la N^{eme} fois. Soit Z le nombre de jet nécessaires pour que le jeu s'arrête.

1) Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre Z .

2) En utilisant une méthode analogue à celle de la question **A**/3.a, déterminer, pour tout nombre entier naturel k , la probabilité pour que le jeu s'arrête au $(N+k)^{eme}$ jet, pile étant obtenu pour la N^{eme} fois.

3) Donner la loi de probabilité de Z .

Exercice 4 : corrigé

Partie I

1) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$s(n,0) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Le réel x étant, en valeur absolue, strictement inférieur à 1, on a :

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} s(n,0) = \frac{1}{1-x}$$

2 a) Pour tout réel x strictement positif, $n\cdot x^n = e^{ln(n)+n\cdot ln(x)}$; on a :

$$ln(n) + n\cdot ln(x) = n\cdot\left(\frac{ln(n)}{n} + ln(x)\right)$$

De $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0$, on en déduit que $n\cdot\left(\frac{ln(n)}{n} + ln(x)\right) \sim n\cdot ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Le réel x étant strictement inférieur à 1, $\lim_{n\to\infty} n\cdot ln(x) = -\infty$ et donc ,

$$\lim_{n\to\infty} e^{ln(n)+n\cdot ln(x)} = 0 \quad \text{soit aussi,} \quad \lim_{n\to\infty} n\cdot x^n = 0$$

b) On a successivement :

$$(1-x)\cdot s(n,1) = \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot x^{k-1} - x\cdot\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot x^{k-1}$$

$$(1-x)\cdot s(n,1) = \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot x^{k}$$

Et en effectuant le changement de variable dans la première somme : k donne $k+1$

On obtient :

$$(1-x)\cdot s(n,1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\cdot x^k - \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot x^k$$

Puis en réduisant :

$$(1-x)\cdot s(n,1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot x^k - \sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k - (n+1)\cdot x^{n+1}$$

$$(1-x)\cdot s(n,1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k - (n+1)\cdot x^{n+1}$$

Soit, finalement :

$$(1-x)\cdot s(n,1) = s(n,0) - (n+1)\cdot x^{n+1}$$

D'après les questions précédentes, on a :

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot x^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} s(n,0) = \frac{1}{1-x}$$

On en déduit que $s(n,1)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$ et que :

$$\lim_{n\to\infty} s(n,1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

c) Pour n entier naturel fixé, on considère la fonction définie sur $]0\,,1[$ par :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Par dérivation on obtient :

$$\frac{d}{dx}F_n(x) = \frac{-(n+2)\cdot x^{n+1}}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

D'après les questions 1) et 2 a) , on a :

$$\lim_{n\to\infty} (n+2)\cdot x^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x^{n+2} = 0$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-(n+2)\cdot x^{n+1}}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En remarquant par ailleurs que pour tout x de $]0, 1[$, on a :

$$\frac{d}{dx}F_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot x^{k-1} = s(n,1)$$

on peut donc conclure que :

$$\lim_{n \to \infty} s(n,1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

3 a) Développons :

$$(1-x)\cdot s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r}\cdot x^k - x\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r}\cdot x^k$$

$$(1-x)\cdot s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r}\cdot x^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r}\cdot x^{k+1}$$

On effectuer un changement de variable dans la seconde somme : k donne $k-1$

$$(1-x)\cdot s(n,r) = \sum_{k=1}^{n} \binom{r+k}{r}\cdot x^k + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{r+k-1}{r}\cdot x^k$$

Et, en regroupant les termes :

$$(1-x)\cdot s(n,r) = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{r+k}{r} - \binom{r+k-1}{r}\right]\cdot x^k + 1 - \binom{r+n}{n}\cdot x^{n+1}$$

On utilise la formule de Pascal rappelée dans l'énoncé :

$$(1-x)\cdot s(n,r) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+r-1}{r-1}\cdot x^k + 1 - \binom{r+n}{n}\cdot x^{n+1}$$

ou encore :

$$(1-x)\cdot s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+r-1}{r-1}\cdot x^k - \binom{r+n}{n}\cdot x^{n+1}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(1-x)\cdot s(n,r) = s(n,r-1) - \binom{r+n}{r}\cdot x^{n+1}$$

b) On reprend le raisonnement de la question 2 a).

Pour tout réel x strictement positif, $n^r\cdot x^n = e^{r\cdot ln(n)+n\cdot ln(x)}$; on a :

$$r\cdot ln(n) + n\cdot ln(x) = n\cdot\left(r\cdot\frac{ln(n)}{n} + ln(x)\right)$$

De $\lim_{n \to \infty} \frac{ln(n)}{n} = 0$, on en déduit que $n\cdot\left(r\cdot\frac{ln(n)}{n} + ln(x)\right) \sim n\cdot ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Le réel x étant strictement inférieur à 1, $\lim_{n \to \infty} n\cdot ln(x) = -\infty$ et donc ,

$$\lim_{n \to \infty} e^{r\cdot ln(n)+n\cdot ln(x)} = 0 \quad \text{soit aussi,} \quad \lim_{n \to \infty} n^r\cdot x^n = 0$$

Par ailleurs,

$$\binom{n+r}{r}x^n = \frac{x^n}{r!}\cdot \prod_{k=1}^{r} (n+k)$$

Le réel r est fixé ; quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\prod_{k=1}^{r} (n+k) \sim n^r$$

et par suite,

$$\binom{n+r}{r}x^n \sim \frac{1}{r!}\cdot\left(n^r\cdot x^n\right) \quad \text{et comme} \quad \lim_{n \to \infty} n^r\cdot x^n = 0$$

on en déduit que :

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n+r}{r}x^n = 0$$

Comme on nous le demande, récurrons :

Pour $r = 0$ on a $s(n,0) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$

Si, pour un r quelconque fixé non ul,

$$s(n, r-1) = \frac{1}{(1-x)^r}$$

alors, en utilisant ;a question 3 a) on a :

$$s(n,r) = \frac{s(n,r-1)}{1-x} - \binom{n+r}{r}\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n+r}{r} x^n = 0$$

on en déduit donc ,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n,r-1)}{1-x} - \binom{n+r}{r} \cdot \frac{x^{n+1}}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(n,r-1)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

ce qui achève la récurrence.
On peut donc en déduire, que pour tout entier naturel r,

$$\lim_{n\to\infty} s(n,r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

c) Si y appartient à $]0,1[$, on a ,d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} \cdot y^k = \frac{1}{(1-y)^{r+1}}$$

Si y n'appartient pas à cet intervalle, le erme général ne tend pas vers 0 et la série est divergente.

Partie II

A 1) Qui n'a pas reconnu une loi binomiale ? Si c'est votre cas, revoyez votre cours :
Nous sommes dans le schéma de Bernoulli avec n épreuves successives identiques et indépendantes.

A l'issue de chaque épreuve, 2 cas possibles : obtenir pile (succès de probabilité $1-x$) et obtenir face (échec de probabilité x). Ainsi S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1-x$. Il s'ensuit que

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\} \quad \mathrm{p}(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot (1-x)^k \cdot x^{n-k}$$

et que

$$E(S_n) = n\cdot(1-x) \qquad V(S_n) = n\cdot x\cdot(1-x)$$

Toutefois, l'étudiant attentif a bien noté que l'énoncé lui disait "Calculer …" ; on se doit doit donc de donner une démonstration rapide de ce résultat. On peut, par exemple, introduire les variables de Bernoulli X_k qui prend la valeur 1 si au $k^{\text{ème}}$ lancer, on a aobtenu pile et 0 sinon. Chaque variable X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-x$

et comme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ on en déduit que :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\cdot(1-x) \qquad V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n\cdot x\cdot(1-x)$$

2) Qui n'a pas reconnu une loi géométrique ? Si c'est encore votre cas, revoyez aussi cette partie du cours ; c'est un temps d'attente d'ordre 1 dans une succession d'épreuves identiques et indépendantes.
Rapidement, car on a encore beaucoup de choses à faire, T_1 suit une loi géométrique de paramètre $1-x$; on a donc pour toutentier naturel k,

$$p(T_1 = k) = x^{k-1}\cdot(1-x)$$

et aussi :

$$E(T_1) = \frac{1}{1-x} \qquad V(T_1) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ces résultats peuvent être retrouvé par un calcul direct utilisant la partie I. En effet :

$$E(T_1) = (1-x)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x^{k-1} = (1-x)\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}$$

3) L'objet de cette troisième question est de déterminer l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi de … ? Non ; ce n'est pas une loi du programme. Il s'agit d'un temps d'attente d'ordre r dans une succession d'épreuves identiques et indépendantes.

Cette loi est connu dans la littérature sous le nom de loi de Pascal. Insistons sur le fait que n'étant pas une loi du programme, aucune connaissance n'est exigible et que si, suite à un problème vous l'avez reconnu et que vous souvenez des résultats obtenus, vous ne devez pas les utiliser. La seule règle : suivre l'énoncé.

a) On notera que l'énoncé nous fait admettre que T_r, pour r supérieur à 1, est une variable aléatoire pour nous faire démontrer, en définitive, que s'en est bien une (la somme des probabilités des événements élémentaires est égal à 1).

Pour simplifier les écritures, notons P_j l'événement : obtenir pile au $j^{\text{ème}}$ lancer.

Pour montrer l'équivalence de deux événements, on montre qu'ils s'impliquent mutuellement.

Pour tout entier naturel k, ($T_r = k+r$) est réalisé si, et seulement si, au cours des $k+r-1$ premiers lancers, on a obtenu pile $r-1$ fois, et on a obtenu pile au ($k+r$)ème jet.

En utilisant les notations précédentes, ($T_r = k+r$) est réalisé si, et seulement si, les événements ($S_{k+r-1} = r-1$) et P_{k+r} le sont.

On peut ainsi écrire : ($T_r = k+r$) = ($S_{k+r-1} = r-1$) $\cap P_{k+r}$

l'indépendance des jets supposés dans l'énoncé nous donne :

$$p\left(T_r = k+r\right) = p\left(S_{k+r-1} = r-1\right)\cdot p\left(P_{k+r}\right)$$

On en déduit donc :

$$p\left(T_r = k+r\right) = \binom{k+r-1}{r-1}\cdot(1-x)^{r-1}\cdot x^{k+r-1-(r-1)}\cdot(1-x)$$

et après réduction :

$$p\left(T_r = k+r\right) = \binom{k+r-1}{r-1}\cdot(1-x)^r\cdot x^k$$

on vérifie que T_r est bien une variable aléatoire :

$$\sum_{k=0}^{n} p\left(T_r = k+r\right) = (1-x)^r\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r-1}{r-1}\cdot x^k$$

soit, en utilisant la notation de la question 3 a) de la partie I, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} p\left(T_r = k+r\right) = (1-x)^r\cdot s(n, r-1)$$

Nous avons montré que $s(n, r-1)$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$, et que cette limite est $s(r-1)$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{\infty} p\left(T_r = k+r\right) = (1-x)^r\cdot s(r-1) = (1-x)^r\cdot\frac{1}{(1-x)^r} = 1$$

On peut donc conclure que T_r est bien une variable aléatoire.

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = \sum_{k=0}^{n}(k+r)\cdot\binom{k+r-1}{r-1}\cdot(1-x)^r\cdot x^k$$

Je ne doute pas que vous avez immédiatement reconnu la formule

$$(k+r)\cdot\binom{k+r-1}{r-1} = r\cdot\binom{k+r}{r}$$

et donc que vous avez écrit :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = \sum_{k=0}^{n} r\cdot\binom{k+r}{r}\cdot(1-x)^r\cdot x^k$$

puis :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = r\cdot(1-x)^r\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{r}\cdot x^k$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = r\cdot(1-x)^r\cdot s(n, r)$$

Nous avons prouvé la convergence partie I question 3 b) ; on peut donc en conclure que T_r a une espérance et que

$$E\left(T_r\right) = r\cdot(1-x)^r\cdot s(r) = \frac{r}{1-x}$$

c) Classique ; vous devez savoir que, pour toute variable aléatoire X ayant une espérance et une variance,

$$E\left(X^2\right) + E(X) = E\left(X^2 + X\right) = E[X\cdot(X+1)]$$

L'expression de la variance s'écrit alors :

$$V(X) = E[X\cdot(X+1)] - E(X) - (E(X))^2$$

Mais pourquoi compliquer ainsi les choses ? Tout bêtement, parceque ça simplifie le calcul ; en effet, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)\cdot(k+r+1)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = r\cdot(1-x)^r\cdot\sum_{k=0}^{n} (k+r+1)\cdot\binom{r+k}{r}\cdot x^k$$

Nul doute que vous avez reconnu ici encore la formule

$$(k+r+1)\cdot\binom{k+r}{r} = (r+1)\cdot\binom{k+r+1}{r+1}$$

et donc,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)\cdot(k+r+1)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = r\cdot(1-x)^r\cdot\sum_{k=0}^{n} (r+1)\cdot\binom{r+k+1}{r+1}\cdot x^k$$

ce qui, avec les notations de l'énoncé, s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)\cdot(k+r+1)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = r\cdot(r+1)\cdot(1-x)^r\cdot s(n, r+1)$$

La convergence étant acquise depuis la fin de la première partie,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)\cdot(k+r+1)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = r\cdot(r+1)\cdot(1-x)^r\cdot s(r+1)$$

et après simplification :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\cdot(k+r+1)\cdot p\left(T_r = k+r\right) = \frac{r\cdot(r+1)}{(1-x)^2}$$

Remarquons maintenant, que si X est une variable aléatoire telle que les espérances de X et de $X\cdot(X+1)$ existent, alors la variance de X existe aussi (laissons le soin au lecteur de le démontrer). On a :

$$V\left(T_r\right) = E\left[T_r\cdot\left(T_r+1\right)\right] - E\left(T_r\right) - \left(E\left(T_r\right)\right)^2$$

Et donc :

$$V\left(T_r\right) = \frac{r\cdot(r+1)}{(1-x)^2} - \frac{r}{1-x} - \frac{r^2}{(1-x)^2}$$

se simplifie en :

$$V\left(T_r\right) = \frac{rx}{(1-x)^2}$$

B 1) Si $N = 1$, alors en un seul jet on a obtenu soit pile soit face et donc $Z(\Omega) = \{1\}$.
Soit maintenant $Z > 1$; il est clair qu'il faut au moins N jets pour obtenir, soit pile, soit face, exactement N fois. En $2\cdot N - 1$ jets, si le nombre de face f obtenu est strictement inférieur à N et si p désigne le nombre de pile obtenu, on a :

$$p = 2N - 1 - f > 2\cdot N - 1 - N \quad \text{soit} \quad p > N - 1$$

et donc $p \geq N$.
Dans le cas extrême où on a obtenu face $N-1$ fois, alors au $(2\cdot N - 1)^{\text{ème}}$ jet on obtient exactement pile N fois. Il ne peut donc pas y avoir plus de $2\cdot N - 1$ jets.
Soit maintenant k un entier compris entre 1 et $N-1$; considérons l'événement : "obtenir uniquement pile au cours des $N-1$ premiers jets, puis uniquement face au cours des k jets suivants, et enfin pile". Cet événement est une réalisation de l'événement $(Z = N + k)$; on a donc $Z(\Omega) = \{N, \ldots, 2\cdot N - 1\}$.
On remarque qu'on retrouve l'univers pour $N = 1$.

2) Désignons par X_k l'événement : "le jeu s'arrête au $(N+k)^{\text{ème}}$ jet, pile étant obtenu N fois". D'après la question précédente, si $k > N$, alors $p\left(X_k\right) = 0$.
Soit maintenant $0 \leq k \leq N-1$; X_k = "obtenir pile exactement $N-1$ fois au cours des $N+k-1$ premiers lancers et pile au $(N+k)^{\text{ème}}$ lancer".

$$X_k = \left(S_{N+k-1} = N-1\right) \cap P_{N+k}$$

Par indépendance, on obtient :

$$p\left(X_k\right) = (1-x)\cdot\binom{N+k-1}{N-1}\cdot(1-x)^{N-1}\cdot x^k$$

On réduit :

$$p(X_k) = \binom{N+k-1}{N-1} \cdot (1-x)^N \cdot x^k$$

3) En désignant par Y_k l'événement : "le jeu s'arrête au $(N+k)^{\text{ème}}$ jet, pile étant obtenu N fois". D'après la question précédente, si $k > N$, alors $p(Y_k) = 0$.

Soit maintenant $0 \le k \le N-1$; X_k = "obtenir face exactement $N-1$ fois au cours des $N+k-1$ premiers lancers et face au $(N+k)^{\text{ème}}$ lancer".

De même que ci-dessus en permutant les rôles de x et de $1-x$

$$p(Y_k) = \binom{N+k-1}{N-1} \cdot (1-x)^k \cdot x^N$$

L'événement $(Z = N+k) = X_k \cup Y_k$ et, par incompatibilité de ces deux événements,

$p(Z = N+k) = 0$ si $k \ge N$

$$p(Z = N+k) = \binom{N+k-1}{N-1} \cdot \left[(1-x)^N \cdot x^k + (1-x)^k \cdot x^N \right] \quad \text{si } 0 \le k \le N-1$$

Il est inutile de chercher à réduire cette expression.

Exercice 5 : quelques questions d'albèbre

1) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ un réel tels que $uov = \lambda.id$ alors $vou = \lambda.id$.
Le raisonnement suivant est-il exact ?
"Soit f et g deux endomorphismes d'un même espace vectoriel de dimension finie E, λ une valeur propre non nulle de fog et F son espace propre associé . Alors, la restriction de $fog \quad \lambda id$ à F est l'application nulle ; donc la restriction de fog à F est $\lambda.id$; on en déduit que la restriction de fog à F est $\lambda.id$.
On peut donc en conclure que
Si f et g sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel de dimension finie E, λ une valeur propre non nulle de fog et F son espace propre associé, alors λ est une valeur propre de gof et F est son espace propre associé."

2) Est-il exact que si A est une matrice carrée non inversible, il en est de même pour ses réduites de Gauss ?

3) Comparer les noyaux d'une matrice carrée A avec celui de ses réduites de Gauss (on convient d'appeler noyau d'une matrice carrée A, le noyau de l'application linéaire canoniquement associé)

4) Est-il exact qu'une matrice carrée A et ses réduites de Gauss ont les mêmes valeurs propres?

Exercice 5 : corrigé

1) Si u et v sont deux endomorphismes de E et λ un réel non nul tels que $u \circ v = \lambda \cdot id$, alors v est nécessairement bijective ; en effet, supposons qu'elle ne le soit pas ; il existe un vecteur x non nul de E tel que $v(x) = 0$; mais alors on aurait :

$$0 = u \circ v(x) = \lambda \cdot x$$

et par suite x serait nul, ce qui n'est pas. Donc v est bijective et on a alors :

$$u = \lambda \cdot v^{-1} \quad \text{et donc} \quad v \circ u = \lambda \cdot id$$

Le raisonnement qui suit dans la question, est faux :
si la restriction de $f \circ g$ à F est un endomorphisme de F, cela ne veut pas dire que $g \circ f$ en soit un. En effet, l'image d'un vecteur x de F par g est un vecteur y de E et pas nécessairement de F.

2) Oui. Pour en comprendre la raison, il convient de se rappeler que les transformations opérées sur les matrices par la méthode de Gauss sont des transformations bijectives correspondant à des produits à gauche de la matrice donnée par une matrice inversible.
Examinons ceci sur un exemple ; posons

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le premier élément de la première ligne de A ne peut pas servir de pivot puisqu'il est nul ; on permute alors la première ligne avec l'une des deux autres, disons la troisième pour fixer les idées ; en effectuant cette transformation sur les deux matrices A et I, on obtient :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A_1 = I_1 \cdot A$

Maintenant, nous allons remplacer la seconde ligne par la seconde ligne plus la première ; en effectuant cette transformation sur les deux matrices A_1 et I, on obtient :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A_2 = I_2 \cdot A_1$

Enfin, on va remplacer la troisième ligne par 2 fois la troisième plus la seconde ; en effectuant cette transformation sur les deux matrices A_2 et I, on obtient :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A_3 = I_3 \cdot A_2$

Posons $P = I_3 \cdot I_2 \cdot I_1$. On peut ainsi obtenir directement A_3 :

$$A_3 = I_3 \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot A = P \cdot A$$

La matrice P est un produit de matrices inversibles car chaque transformation admet une réciproque (on peut toujours revenir en arrière)

Ainsi, une réduite de Gauss de la matrice A est un produit de la forme $P \cdot A$ où P est une matrice inversible.

Posons $B = P \cdot A$; on a alors $A = P^{-1} \cdot B$; si B est inversible, la matrice A est inversible comme produit de matrices inversibles ; donc si A n'est pas inversible, B ne l'est pas non plus.

3) Soit X une matrice colonne élément du noyau de A ; on a

$$B \cdot X = (P \cdot A) \cdot X = P \cdot (A \cdot X) = P \cdot 0 = 0$$

donc X est un élément du noyau de B. Inversement, si X est un élément du noyau de B, on a :

$$A \cdot X = \left(P^{-1} \cdot B\right) \cdot X = P^{-1} \cdot (B \cdot X) = P^{-1} \cdot 0 = 0$$

donc X est un élément du noyau de A.

Il s'ensuit que les noyaux de A et de ses réduites de Gauss sont identiques.

4) D'après la question précédente, si 0 est valeur propre d'une matrice carrée A alors c'est aussi une valeur propre de toutes ses réduites de Gauss. La troisième question nous montre aussi que les espaces propres associés à la valeur propre 0 sont les mêmes.

Mais peut-on généraliser ?

La réponse est non. Si λ est une valeur propre de A, il existe une matrice inversible $P(\lambda)$ telle que la matrice $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot (A - \lambda \cdot I)$ soit une matrice triangulaire avec au moins un 0 sur la diagonale.

Par ailleurs, on obtient une réduite de Gauss C de A en faisant $\lambda = 0$. On a $C = P(0) \cdot A$ et λ est une valeur propre de C si $C - \lambda \cdot I$ est non inversible, c'est à dire si $P(0) \cdot A - \lambda \cdot I$ qui est déjà triangulaire, a au moins un 0 sur la diagonale. On voit que, si $\lambda \neq 0$, les deux matrices $C - \lambda \cdot I$ et $B(\lambda)$ n'ont rien à voir entre elles ; elles n'ont à priori aucune raison d'être simultanément non inversibles.

Par exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

En permutant les deux lignes, on obtient la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux valeurs propres $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$. Un calcul immédiat nous montre que la matrice $A - \lambda \cdot I$ est inversible pour tout réel λ et donc, en particulier pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$.

Les deux matrices n'ont donc pas les mêmes valeurs propres.

QCM : corrigé

	Propositions	V	F
1	Pour qu'une suite soit convergente, il faut qu'elle soit bornée C'est vrai ; si (u_n) tend vers l, alors il existe un rang N à partir duquel tous les termes sont dans l'intervalle $[l-1\ ,\ l+1]$; tous les autres termes sont compris entre $\min(u_k \,/\, k \leq N)$ et $\max(u_k \,/\, k \leq N)$.	x	
2	Pour qu'une suite soit convergente, il suffit qu'elle soit bornée. C'est faux ; prendre la suite de terme général $(-1)^n$.		x
3	Il existe des suites monotones non convergentes. C'est vrai ; celles qui ne sont pas bornées .	x	
4	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente définie par son premier terme $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$,alors la fonction f est bornée. C'est faux ; prendre la suite définie par $u_0 = 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.		x
5	Si f est une fonction croissante sur un intervalle $]a, b[$ alors f a une limite, éventuellement infinie en b . C'est vrai ; c'est même un théorème du cours	x	
6	Si f est une fonction bornée sur $]a, b[$ alors elle admet des limites finies en a et en b . C'est faux ; la fonction peut très bien ne pas admettre de limite du tout ; par exemple la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$; pour tout entier naturel non nul n , $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ tandis que $f\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$		x
7	Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x on ait $f(x+1) = f(x)$, alors f est croissante. C'est faux ; il suffit de prendre une fonction de période 1, par exemple la fonction f définie par : $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$		x
8	Si une fonction f est bornée sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f est bornée sur $[a, b[$ C'est faux ; la fonction f définie sur $[1, 2[$ par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ est continue sur tout segment inclus dans $[1, 2[$ et donc est bornée sur tout segment inclus dans $[1, 2[$, mais n'est pas bornée sur cet intervalle		x
9	Si f est continue sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f est continue sur $[a,\ b[$. C'est vrai, elle est alors continue en tout point de l'intervalle et donc sur l'intervalle	x	
10	Si f a des primitives sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f a des primitives sur $[a, b[$. C'est vrai car pour tout point c de $[a, b[$, f a des primitives sur $[a, (b + c)/2]$	x	
11 #	Si f est intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$. C'est faux ; de telles intégrales sont communément appelées intégrales impropres et leur étude fait partie du programme de seconde année ; disons seulement qu'une fonction est intégrable sur $[a, b[$, non seulement si pour tout réel x de $[a, b[$, l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ existe, mais si en plus, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie quand x tend vers b . Par exemple, $\int_1^2 \frac{dt}{t-2}$ n'existe pas (on dit aussi, diverge) car pour tout réel x de $[1, 2[$, $\int_1^x \frac{dt}{t-2} = \ln(2-x)$ qui n'a pas de limite finie quand x tend vers 2.		x
12	Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite λ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ C'est faux ; d'abord si λ n'est pas nul, les deux limites n'existent pas, et pour $\lambda = 0$, en cas de convergence, les limites n'ont aucune raison d'être les mêmes ; par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$ tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2$		x
13	Si (u_n) est une suite majorée par un réel a, alors la série $\sum u_n$ est majorée par le réel a.		x

	C'est faux ; par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ pour n entier naturel non nul, est majorée par 1 ; mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ est non majorée.		
14 \#	Si $\sum u_n$ est une série convergente, la série $\sum (-1)^n u_n$ est aussi convergente. C'est faux ; prendre $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$		x
15 \#	Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $Ker(f) = Ker(g)$ et $Im(f) = Im(g)$. On a nécessairement $f = g$ C'est faux ; s'il en était ainsi, tous les endomorphismes bijectifs (automorphismes) seraient tous égaux entre eux.		x
16	Si X est une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors la variable $\lvert X\rvert$ a aussi une espérance. C'est vrai ; c'est une condition d'existence de l'espérance	x	
17	Il existe des fonctions de répartition décroissantes C'est faux ; soit x un réel et h un réel positif ; $F(x+h) - F(x) = prob(x < X \leq x + h) \geq 0$		x
18	Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p et si Y suit une loi binomiale de paramètres n et q, alors, si X et Y sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p + q$. C'est faux ; il doit y a voir une confusion avec la propriété suivante : Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p et si Y suit une loi binomiale de paramètres m et p, alors, si X et Y sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n + m$ et p.		x
19	Si f et g sont des applications linéaires telles que fog est l'application nulle, alors gof est l'application nulle. C'est faux ; considérer par exemple f et g de matrices respectives $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Alors fog est l'application nulle, tandis que $gof = 2f$.		x
20	Soit n un entier supérieur à 1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ? C'est faux ; Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonalisable, semblable à $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et B est diagonalisable car diagonale. En revanche, leur somme $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a qu'une seule valeur propre, 0 et est différente de la matrice nulle ;il s'ensuit qu'elle n'est pas diagonalisable.		x
21	Si N est une matrice carrée d'ordre $n > 1$ telle que $N^2 = N$, alors $rg(N) = n$ C'est faux en général ; plus précisément, c'est faux si $N \neq I$. En effet, soit $N \neq I$ et $N^2 = N$. On a alors $N(N - I) = 0$; si le rang de N était égal à n, alors, en multipliant à gauche par N^{-1} on aurait $N - I = 0$ et donc $N = I$; ce qui contredit l'hypothèse faite sur N. Il en résulte que le rang de N est alors strictement inférieur à n.		x
22	Si N est une matrice carrée d'ordre n telle que $N^2 = N$ et si $rg(N) = n$ alors $N = I$. C'est vrai ; on a montré ci-dessus que si $N^2 = N$ alors $N \neq I$ implique $rg(N) \neq n$ par contraposition on a : $rg(N) = n$ implique $N = I$.	x	
23	Il existe des matrices carrées N d'ordre $n > 1$ telles que N^2 soit non nulle et ne possède que des termes négatifs C'est vrai ; on prendra par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; on a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	x	
24	Si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = I$, alors BA est-il aussi égal à I ? C'est vrai ; supposons B non inversible ; il existe une matrice colonne X non nulle telle que $BX = 0$; mais alors $(AB)X = A(BX) = 0$; ce qui prouve que AB n'est pas inversible, et qu'elle ne peut donc pas être égal à I. Il en résulte que B est inversible et, par suite, $A = B^{-1}$; en multipliant par B, on a $BA = I$.	x	
25	Si A est une matrice carrée, symétrique et inversible, son inverse est symétrique ? C'est vrai ; si A est inversible et symétrique, alors $A^{-1} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ Et donc A^{-1} est symétrique	x	