

## Translatées d'une application

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

– Pour toute application  $f$  de  $E$  et pour tout réel  $t$ , on pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x + t)$ .

On dit que l'application  $f_t$ , qui appartient à  $E$ , est une *translatée* de  $f$ .

– On note  $E_f$  le sous-espace de  $E$  engendré par les  $f_t$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications  $g$  de  $E$  qui peuvent s'écrire au moins d'une manière sous la forme  $g = \lambda_1 f_{t_1} + \lambda_2 f_{t_2} + \dots + \lambda_p f_{t_p}$ , où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  et  $t_1, t_2, \dots, t_p$  sont des familles de  $p$  réels quelconques ( $p$  étant lui même un entier positif quelconque).

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que  $E_f$  est de dimension finie et en donner une base formée de fonctions du type  $f_t$  :

(a) L'application  $f$  est définie par :  $f(x) = \exp(x)$  [S]

(b) L'application  $f$  est définie par :  $f(x) = \sin x$  [S]

(c) L'application  $f$  est définie par :  $f(x) = x$ . [S]

2. Montrer que si  $f$  est de la forme  $x \rightarrow f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ , où  $P$  est un polynôme et  $\alpha$  un réel, alors  $E_f$  est de dimension finie. [S]

3. On suppose que  $f$  est définie par  $f(x) = \exp(\exp x)$ .

Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , les fonctions  $f_0, f_1, \dots, f_n$  forment une famille libre. Qu'en déduit-on pour le sous-espace  $E_f$ ? [S]

4. Dans cette question, on caractérise les familles libres finies de  $E$  à l'aide d'un déterminant.

(a) Soit  $g_1, g_2$  une famille libre de  $E$ . Montrer qu'on peut trouver deux réels distincts  $a_1$  et  $a_2$  tels que le déterminant  $\begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(a_2) \\ g_2(a_1) & g_2(a_2) \end{vmatrix}$  soit non nul. [S]

(b) Montrer plus généralement que si  $g_1, g_2, \dots, g_n$  est une famille libre de  $E$ , on peut trouver  $n$  réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$  distincts deux à deux, tels que le déterminant  $\Delta_n$ , carré d'ordre  $n$  et de terme général  $\delta_{ij} = g_i(a_j)$ , soit non nul. [S]

5. Soit  $f$  un élément de  $E$ , tel que  $\dim(E_f) = n \geq 1$ . Soit  $g_1, \dots, g_n$  une base de  $E_f$ .

(a) Montrer qu'il existe une unique suite  $h_1, \dots, h_n$  d'applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x + t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \dots + h_n(t)g_n(x). \quad [\text{S}]$$

(b) Montrer qu'on peut trouver  $n$  réels  $a_1, \dots, a_n$  distincts deux à deux tels que pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $h_j$  soit combinaison linéaire de  $f_{a_1}, \dots, f_{a_n}$ .

Indication : utiliser 4b et considérer un certain système de Cramer.

En conclure que  $h_1, h_2, \dots, h_n$  appartiennent à  $E_f$ . [S]

(c) Montrer que les dérivées successives de  $f$  sont dans  $E_f$  (utiliser 5a.)

En déduire que  $f$  satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants. [S]

6. Trouver tous les éléments  $f$  de  $E$  tels que  $\dim E_f \leq 2$ . [S]

## Corrigé du problème

1. (a) Soit  $g$  un élément de  $E_f$ .

Il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  et  $t_1, \dots, t_p$  tels que  $g = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_{t_k}$  c'est-à-dire tels que,

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$g(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \exp(t_k + x) = \left( \sum_{k=1}^p \lambda_k \exp(t_k) \right) \exp(x) = \mu f(x), \text{ avec } \mu = \sum_{k=1}^p \lambda_k \exp(t_k).$$

Tout élément de  $E_f$  est donc un multiple de  $f$ .

La réciproque est évidente puisque  $f = f_0$ .

On en déduit que  $\dim E_f = 1$  et que  $E_f = \mathbb{R}f$ . [Q]

- (b) Pour tous réels  $t$  et  $x$ , on a :

$$f_t(x) = \sin(t+x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\cos(x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\sin(x + \frac{\pi}{2}).$$

Autrement dit :  $f_t = \cos(t)f_0 + \sin(t)f_{\pi/2}$ .

Toute combinaison linéaire des fonctions  $f_t$ , c'est-à-dire tout élément de  $E_f$ , est donc combinaison linéaire de  $f_0$  et de  $f_{\pi/2}$ . La réciproque est évidente.

Les fonctions  $f_0$  et  $f_{\pi/2}$  sont évidemment linéairement indépendantes.

On en déduit que  $E_f = \text{vect}\{f_0, f_{\pi/2}\}$  et que  $\dim E_f = 2$ . [Q]

- (c) Pour tous réels  $t$  et  $x$ , on a :  $f_t(x) = t+x = (1-t)x + t(x+1) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ .

Autrement dit :  $f_t = (1-t)f_0 + tf_1$ . Toute combinaison linéaire des fonctions  $f_t$  est donc combinaison linéaire de  $f_0$  et de  $f_1$ . La réciproque est évidente.

Enfin les applications  $f_0$  et  $f_1$  sont indépendantes.

On en déduit que  $E_f = \text{vect}\{f_0, f_1\}$  et que  $\dim E_f = 2$ . [Q]

2. Pour tous réels  $t$  et  $x$ ,  $f_t(x) = f(t+x) = P(t+x) \exp(\alpha(t+x)) = \exp(\alpha t)P(t+x) \exp(\alpha x)$ .

Si  $P$  est de degré  $n$ , le polynôme  $x \rightarrow P(x+t)$  est également de degré  $n$  et il est donc combinaison linéaire des fonctions  $x \rightarrow x^k$ , avec  $0 \leq k \leq n$ .

On voit donc que  $f_t$  est combinaison linéaire des  $n+1$  fonctions  $g_k : x \rightarrow x^k \exp(\alpha x)$ , avec  $0 \leq k \leq n$ . Il en est donc de même des combinaisons linéaires des fonctions  $f_t$ , c'est-à-dire des éléments de  $E_f$ .

Ainsi les  $n+1$  applications  $g_k$  constituent-elles une famille génératrice finie de  $E_f$ . On en déduit que  $E_f$  est de dimension finie. Plus précisément,  $\dim E_f \leq 1 + \deg P$ . [Q]

3. Soit  $n$  un entier naturel. On suppose par l'absurde que  $f_0, f_1, \dots, f_n$  sont liées.

Il existe donc  $n+1$  réels non tous nuls  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$ .

Soit  $r$  la valeur du plus grand indice  $k$  tel que  $\lambda_k \neq 0$ .

L'égalité précédente s'écrit maintenant :  $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f_k + \lambda_r f_r = 0$ ,

c'est-à-dire :  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(e^k e^x) + \lambda_r \exp(e^r e^x) = 0$ .

Multiplions cette égalité par  $\exp(-e^r e^x)$ .

On obtient :  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(\underbrace{(e^k - e^r)}_{<0} e^x) + \lambda_r = 0$ .

On fait tendre  $x$  vers  $+\infty$ . On obtient alors  $\lambda_r = 0$ , ce qui est absurde.

Conclusion : pour tout entier  $n$ , la famille  $f_0, f_1, \dots, f_n$  est libre.

On en déduit que  $E_f$ , qui contient des familles libres de cardinal quelconque, n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. [Q]

4. (a) Puisque  $g_1$  et  $g_2$  sont libres,  $g_1$  n'est pas la fonction nulle.

Il existe donc un réel  $a_1$  tel que  $g_1(a_1)$  soit non nul.

Considérons alors l'application :

$$x \rightarrow \delta_2(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & g_2(x) \end{vmatrix} = g_1(a_1)g_2(x) - g_2(a_1)g_1(x).$$

Autrement dit :  $\delta_2 = g_1(a_1)g_2 - g_2(a_1)g_1$ .

Puisque  $g_1(a_1) \neq 0$ ,  $\delta_2$  n'est pas l'application nulle, car sinon  $g_1, g_2$  seraient liées.

Il existe donc un réel  $a_2$  tel que  $\Delta_2 = \delta_2(a_2)$  soit non nul, ce qu'il fallait démontrer.

NB : les réels  $a_1$  et  $a_2$  sont nécessairement distincts car  $\delta_2(a_1) = 0$ . [Q]

- (b) On procède par récurrence sur  $n$ .

La propriété est vraie de façon évidente si  $n = 1$ , et la question précédente nous a montré qu'elle est vraie si  $n = 2$ .

On suppose qu'il en est de même au rang  $n$  (avec  $n \geq 1$  donné).

Soient  $g_1, g_2, \dots, g_{n+1}$  une famille de  $n + 1$  fonctions indépendantes.

Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe  $n$  réels  $a_1, \dots, a_n$ , distincts deux à

deux, tels que  $\Delta_n = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \dots & g_1(a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(a_1) & \dots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$  soit non nul.

On forme alors l'application  $x \rightarrow \delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \dots & g_1(a_n) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & \dots & g_2(a_n) & g_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \dots & g_n(a_n) & g_n(x) \\ g_{n+1}(a_1) & \dots & g_{n+1}(a_n) & g_{n+1}(x) \end{vmatrix}$ .

On développe ce déterminant par rapport à sa dernière colonne.

On voit alors que l'application  $\delta_{n+1}$  peut s'écrire  $\delta_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k g_k$ , avec  $\lambda_n = \Delta_n$ .

On sait que le coefficient  $\lambda_n$  est non nul et que les applications  $g_1, g_2, \dots, g_{n+1}$  sont libres. Il en découle que l'application  $\delta_{n+1}$  ne peut pas être l'application nulle.

Il existe donc un réel  $a_{n+1}$  tel que  $\Delta_{n+1} = \delta_{n+1}(a_{n+1})$  soit non nul.

Enfin  $a_{n+1}$  est différent de  $a_1, \dots, a_n$  car il est clair que  $\delta_{n+1}$  s'annule en  $a_1, \dots, a_n$ .

On a ainsi prouvé la propriété au rang  $n + 1$ , ce qui achève la récurrence. [Q]

5. (a) Pour tout réel  $t$ , l'application  $f_t$  s'écrit de manière unique comme une combinaison

linéaire de  $g_1, g_2, \dots, g_n$  :  $\exists! (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  tq  $f_t = \sum_{k=1}^n h_k g_k$ .

Mais les coefficients  $h_k$ , définis de manière unique, sont en fait des fonctions de  $t$ .

L'égalité précédente s'écrit donc  $\forall t \in \mathbb{R}, f_t = \sum_{k=1}^n h_k(t)g_k$ ,

c'est-à-dire  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t) = \sum_{k=1}^n h_k(t)g_k(x)$ . [Q]

- (b) On sait qu'il existe  $n$  réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , distincts deux à deux, tels que la matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  et de terme général  $a_{ij} = g_i(a_j)$  soit inversible.

Dans l'égalité vue en (5a) on choisit successivement  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ .

On obtient alors le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} g_1(a_1)h_1(t) + g_2(a_1)h_2(t) + \dots + g_n(a_1)h_n(t) = f(a_1+t) = f_{a_1}(t) \\ g_1(a_2)h_1(t) + g_2(a_2)h_2(t) + \dots + g_n(a_2)h_n(t) = f(a_2+t) = f_{a_2}(t) \\ \vdots \\ g_1(a_n)h_1(t) + g_2(a_n)h_2(t) + \dots + g_n(a_n)h_n(t) = f(a_n+t) = f_{a_n}(t) \end{cases}$$

Considérons ces égalités comme un système de  $n$  équations linéaires relativement aux inconnues,  $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$ . La matrice de ce système est la matrice  $A$  précédemment évoquée, dont on sait qu'elle est inversible.

On peut résoudre ce système (dont le déterminant est le  $\Delta_n$  de la question 4b) en utilisant les formules de Cramer. Pour prendre l'exemple de  $h_1(t)$ , on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_1(t) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} f_{a_1}(t) & g_2(a_1) & \dots & g_n(a_1) \\ f_{a_2}(t) & g_2(a_2) & \dots & g_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{a_n}(t) & g_2(a_n) & \dots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe le déterminant du numérateur par rapport à sa première colonne, on constate que  $h_1$  peut s'écrire sous la forme :  $h_1 = \mu_1 f_{a_1} + \mu_2 f_{a_2} + \dots + \mu_n f_{a_n}$ .

L'application  $h_1$  est donc combinaison linéaire des  $f_{a_k}$ , ce qui prouve qu'elle est dans  $E_f$  (en particulier elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .)

Par un raisonnement identique, on voit que  $h_2, \dots, h_n$  appartiennent elles aussi à  $E_f$  et sont donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Ceci termine la démonstration de cette question. [Q]

- (c) On connaît l'égalité  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \dots + h_n(t)g_n(x)$ .

Les applications  $h_1, \dots, h_n, g_1, \dots, g_n$  sont dans  $E_f$  et sont donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On peut alors dériver  $p$  fois par rapport à la variable  $t$ .

Pour tout entier  $p$ , et tous réels  $x$  et  $t$ , on a donc :

$$f^{(p)}(x+t) = h_1^{(p)}(t)g_1(x) + h_2^{(p)}(t)g_2(x) + \dots + h_n^{(p)}(t)g_n(x).$$

Posons alors  $t = 0$ . Il vient :  $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} = h_1^{(p)}(0)g_1 + h_2^{(p)}(0)g_2 + \dots + h_n^{(p)}(0)g_n$ .

Ceci prouve que  $f^{(p)}$  est combinaison linéaire de  $g_1, \dots, g_n$  et est donc un élément de  $E_f$ .

On en déduit que  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$  sont dans  $E_f$ .

Or  $E_f$  est de dimension  $n$ . Les  $n+1$  applications  $f, f', \dots, f^{(n)}$  sont donc liées.

Autrement dit, il existe  $n+1$  scalaires  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels qu'on ait l'égalité  $\lambda_0 f + \lambda_1 f' + \dots + \lambda_n f^{(n)} = 0$ .

Ce résultat signifie effectivement que  $f$  est solution d'une équation différentielle d'ordre  $n$  à coefficients constants. [Q]

6. Supposons que la dimension de  $E_f$  soit inférieure ou égale à 2.

La question précédente montre que l'application  $f$  est solution d'une équation différentielle  $af'' + bf' + cf = 0$  à coefficients constants.

Notons  $(C)$  :  $at^2 + bt + c = 0$  l'équation caractéristique, de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

– Si  $a = 0$  donc si l'équation différentielle vérifiée par  $f$  s'écrit en fait  $bf' + cf = 0$ , alors  $f$  est multiple d'une application  $x \rightarrow \exp(\lambda x)$  (avec par exemple  $\lambda = 0$  si  $c = 0$ .)

Supposons dans les trois cas suivants que  $a$  est non nul.

– Si  $\Delta > 0$ , et si  $\lambda, \mu$  sont les deux racines réelles distinctes de  $(C)$ , alors  $f$  est une combinaison linéaire de  $x \rightarrow \exp(\lambda x)$  et de  $x \rightarrow \exp(\mu x)$ .

– Si  $\Delta < 0$  et si  $z = \lambda + i\mu$ , avec  $\mu \neq 0$ , est une racine complexe non réelle de  $(C)$  alors  $f$  est combinaison linéaire de  $x \rightarrow \exp(\lambda x) \cos(\mu x)$  et de  $x \rightarrow \exp(\lambda x) \sin(\mu x)$ .

– Si  $\Delta = 0$  et si  $\lambda$  est la racine double de l'équation  $(C)$ , alors  $f$  est combinaison linéaire de  $x \rightarrow \exp(\lambda x)$  et de  $x \rightarrow x \exp(\lambda x)$ .

Dans tous les cas,  $f$  est donc de l'un des types suivants, où  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$  sont des réels :

–  $x \rightarrow u(x) = \alpha \exp(\lambda x) + \beta \exp(\mu x)$ .

–  $x \rightarrow v(x) = (\alpha x + \beta) \exp(\lambda x)$ .

–  $x \rightarrow w(x) = \exp(\lambda x)(\alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x))$ .

Inversement, pour chacune de ces applications, le sous-espace  $E_f$  correspondant est de dimension inférieure ou égale à 2.

En effet, comme on l'a fait dans la question (1), on vérifie que pour tout réel  $t$  :

–  $u_t$  est combinaison linéaire de  $x \rightarrow \exp(\lambda x)$  et de  $x \rightarrow \exp(\mu x)$ .

–  $v_t$  est combinaison linéaire de  $x \rightarrow \exp(\lambda x)$  et de  $x \rightarrow x \exp(\lambda x)$ .

–  $w_t$  est combinaison linéaire de  $x \rightarrow \exp(\lambda x) \cos(\mu x)$  et de  $x \rightarrow \exp(\lambda x) \sin(\mu x)$ .

Les formes  $u, v$  et  $w$  définissent donc toutes les applications  $f$  telles que  $\dim E_f \leq 2$ . [Q]