Translatées d'une application

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

– Pour toute application f de E et pour tout réel t, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t)$.
On dit que l'application f_t, qui appartient à E, est une *translatée* de f.

– On note E_f le sous-espace de E engendré par les f_t, c'est-à-dire l'ensemble des applications g de E qui peuvent s'écrire au moins d'une manière sous la forme $g = \lambda_1 f_{t_1} + \lambda_2 f_{t_2} + \cdots + \lambda_p f_{t_p}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont des familles de p réels quelconques (p étant lui même un entier positif quelconque).

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que E_f est de dimension finie et en donner une base formée de fonctions du type f_t :
   (a) L'application f est définie par : $f(x) = \exp(x)$ [S]
   (b) L'application f est définie par : $f(x) = \sin x$ [S]
   (c) L'application f est définie par : $f(x) = x$. [S]
2. Montrer que si f est de la forme $x \to f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un réel, alors E_f est de dimension finie. [S]
3. On suppose que f est définie par $f(x) = \exp(\exp x)$.
   Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ forment une famille libre. Qu'en déduit-on pour le sous-espace E_f ? [S]
4. Dans cette question, on caractérise les familles libres finies de E à l'aide d'un déterminant.
   (a) Soit g_1, g_2 une famille libre de E. Montrer qu'on peut trouver deux réels distincts a_1 et a_2 tels que le déterminant $\begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(a_2) \\ g_2(a_1) & g_2(a_2) \end{vmatrix}$ soit non nul. [S]
   (b) Montrer plus généralement que si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est une famille libre de E, on peut trouver n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincts deux à deux, tels que le déterminant Δ_n, carré d'ordre n et de terme général $\delta_{ij} = g_i(a_j)$, soit non nul. [S]
5. Soit f un élément de E, tel que $\dim(E_f) = n \geq 1$. Soit $g_1, \ldots, g_n$ une base de E_f.
   (a) Montrer qu'il existe une unique suite $h_1, \ldots, h_n$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \cdots + h_n(t)g_n(x)$. [S]
   (b) Montrer qu'on peut trouver n réels $a_1, \ldots, a_n$ distincts deux à deux tels que pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, h_j soit combinaison linéaire de $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}$.
   Indication : utiliser 4b et considérer un certain système de Cramer.
   En conclure que $h_1, h_2, \ldots, h_n$ appartiennent à E_f. [S]
   (c) Montrer que les dérivées successives de f sont dans E_f (utiliser 5a.)
   En déduire que f satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants. [S]
6. Trouver tous les éléments f de E tels que $\dim E_f \leq 2$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

1. (a) Soit g un élément de E_f.

   Il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $t_1, \dots, t_p$ tels que $g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_{t_k}$ c'est-à-dire tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

   $g(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k+x) = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k)\right) \exp(x) = \mu f(x)$, avec $\mu = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k)$.

   Tout élément de E_f est donc un multiple de f.

   La réciproque est évidente puisque $f = f_0$.

   On en déduit que $\dim E_f = 1$ et que $E_f = \mathbb{R}f$. [Q]

   (b) Pour tous réels t et x, on a :

   $f_t(x) = \sin(t+x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\cos(x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\sin(x+\frac{\pi}{2})$.

   Autrement dit : $f_t = \cos(t) f_0 + \sin(t) f_{\pi/2}$.

   Toute combinaison linéaire des fonctions f_t, c'est-à-dire tout élément de E_f, est donc combinaison linéaire de f_0 et de $f_{\pi/2}$. La réciproque est évidente.

   Les fonctions f_0 et $f_{\pi/2}$ sont évidemment linéairement indépendantes.

   On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_{\pi/2}\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

   (c) Pour tous réels t et x, on a : $f_t(x) = t+x = (1-t)x + t(x+1) = (1-t)f_0(x) + t f_1(x)$.

   Autrement dit : $f_t = (1-t)f_0 + t f_1$. Toute combinaison linéaire des fonctions f_t est donc combinaison linéaire de f_0 et de f_1. La réciproque est évidente.

   Enfin les applications f_0 et f_1 sont indépendantes.

   On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_1\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

2. Pour tous réels t et x, $f_t(x) = f(t+x) = P(t+x)\exp(\alpha(t+x)) = \exp(\alpha t)P(t+x)\exp(\alpha x)$.

   Si P est de degré n, le polynôme $x \to P(x+t)$ est également de degré n et il est donc combinaison linéaire des fonctions $x \to x^k$, avex $0 \leq k \leq n$.

   On voit donc que f_t est combinaison linéaire des $n+1$ fonctions $g_k : x \to x^k \exp(\alpha x)$, avec $0 \leq k \leq n$. Il en est donc de même des combinaisons linéaires des fonctions f_t, c'est-à-dire des éléments de E_f.

   Ainsi les $n+1$ applications g_k constituent-elles une famille génératrice finie de E_f. On en déduit que E_f est de dimension finie. Plus précisément, $\dim E_f \leq 1 + \deg P$. [Q]

3. Soit n un entier naturel. On suppose par l'absurde que $f_0, f_1, \dots, f_n$ sont liées.

   Il existe donc $n+1$ réels non tous nuls $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

   Soit r la valeur du plus grand indice k tel que $\lambda_k \neq 0$.

   L'égalité précédente s'écrit maintenant : $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f_k + \lambda_r f_r = 0$,

   c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(\mathrm{e}^k \mathrm{e}^x) + \lambda_r \exp(\mathrm{e}^r \mathrm{e}^x) = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Multiplions cette égalité par $\exp(-\mathrm{e}^r\mathrm{e}^x)$.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp((\underbrace{\mathrm{e}^k - \mathrm{e}^r}_{<0})\mathrm{e}^x) + \lambda_r = 0.$

On fait tendre x vers $+\infty$. On obtient alors $\lambda_r = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : pour tout entier n, la famille $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre.

On en déduit que E_f, qui contient des familles libres de cardinal quelconque, n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. [Q]

4. (a) Puisque g_1 et g_2 sont libres, g_1 n'est pas la fonction nulle.

Il existe donc un réel a_1 tel que $g_1(a_1)$ soit non nul.

Considérons alors l'application :

$x \to \delta_2(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & g_2(x) \end{vmatrix} = g_1(a_1)g_2(x) - g_2(a_1)g_1(x).$

Autrement dit : $\delta_2 = g_1(a_1)g_2 - g_2(a_1)g_1$.

Puisque $g_1(a_1) \neq 0$, δ_2 n'est pas l'application nulle, car sinon g_1, g_2 seraient liées.

Il existe donc un réel a_2 tel que $\Delta_2 = \delta_2(a_2)$ soit non nul, ce qu'il fallait démontrer.

NB : les réels a_1 et a_2 sont nécessairement distincts car $\delta_2(a_1) = 0$. [Q]

(b) On procède par récurrence sur n.

La propriété est vraie de façon évidente si $n = 1$, et la question précédente nous a montré qu'elle est vraie si $n = 2$.

On suppose qu'il en est de même au rang n (avec $n \geq 1$ donné).

Soient $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ une famille de $n+1$ fonctions indépendantes.

Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe n réels $a_1, \ldots, a_n$, distincts deux à deux, tels que $\Delta_n = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \ldots & g_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \ldots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$ soit non nul.

On forme alors l'application $x \to \delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \ldots & g_1(a_n) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & \ldots & g_2(a_n) & g_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \ldots & g_n(a_n) & g_n(x) \\ g_{n+1}(a_1) & \ldots & g_{n+1}(a_n) & g_{n+1}(x) \end{vmatrix}$.

On développe ce déterminant par rapport à sa dernière colonne.

On voit alors que l'application δ_{n+1} peut s'écrire $\delta_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k g_k$, avec $\lambda_n = \Delta_n$.

On sait que le coefficient λ_n est non nul et que les applications $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ sont libres. Il en découle que l'application δ_{n+1} ne peut pas être l'application nulle.

Il existe donc un réel a_{n+1} tel que $\Delta_{n+1} = \delta_{n+1}(a_{n+1})$ soit non nul.

Enfin a_{n+1} est différent de $a_1, \ldots, a_n$ car il est clair que δ_{n+1} s'annule en $a_1, \ldots, a_n$.

On a ainsi prouvé la propriété au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

5. (a) Pour tout réel t, l'application f_t s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_n$: $\exists!(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $f_t = \sum_{k=1}^{n} h_k g_k$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Mais les coefficients h_k, définis de manière unique, sont en fait des fonctions de t.

L'égalité précédente s'écrit donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f_t = \sum_{k=1}^{n} h_k(t) g_k$,

c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t) g_k(x)$. [Q]

(b) On sait qu'il existe n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, distincts deux à deux, tels que la matrice A carrée d'ordre n et de terme général $a_{ij} = g_i(a_j)$ soit inversible.

Dans l'égalité vue en (5a) on choisit successivement $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$.

On obtient alors le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} g_1(a_1)h_1(t) + g_2(a_1)h_2(t) + \cdots + g_n(a_1)h_n(t) = f(a_1+t) & = f_{a_1}(t) \\ g_1(a_2)h_1(t) + g_2(a_2)h_2(t) + \cdots + g_n(a_2)h_n(t) = f(a_2+t) & = f_{a_2}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ g_1(a_n)h_1(t) + g_2(a_n)h_2(t) + \cdots + g_n(a_n)h_n(t) = f(a_n+t) & = f_{a_n}(t) \end{cases}$$

Considérons ces égalités comme un système de n équations linéaires relativement aux inconnues, $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$. La matrice de ce système est la matrice A précédemment évoquée, dont on sait qu'elle est inversible.

On peut résoudre ce système (dont le déterminant est le Δ_n de la question 4b) en utilisant les formules de Cramer. Pour prendre l'exemple de $h_1(t)$, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_1(t) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} f_{a_1}(t) & g_2(a_1) & \ldots & g_n(a_1) \\ f_{a_2}(t) & g_2(a_2) & \ldots & g_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{a_n}(t) & g_2(a_n) & \ldots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe le déterminant du numérateur par rapport à sa première colonne, on constate que h_1 peut s'écrire sous la forme : $h_1 = \mu_1 f_{a_1} + \mu_2 f_{a_2} + \cdots + \mu_n f_{a_n}$.

L'application h_1 est donc combinaison linéaire des f_{a_k}, ce qui prouve qu'elle est dans E_f (en particulier elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.)

Par un raisonnement identique, on voit que $h_2, \ldots, h_n$ appartiennent elles aussi à E_f et sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ceci termine la démonstration de cette question. [Q]

(c) On connait l'égalité $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \cdots + h_n(t)g_n(x)$.

Les applications $h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_n$ sont dans E_f et sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On peut alors dériver p fois par rapport à la variable t.

Pour tout entier p, et tous réels x et t, on a donc :

$f^{(p)}(x+t) = h_1^{(p)}(t)g_1(x) + h_2^{(p)}(t)g_2(x) + \cdots + h_n^{(p)}(t)g_n(x)$.

Posons alors $t = 0$. Il vient : $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} = h_1^{(p)}(0)g_1 + h_2^{(p)}(0)g_2 + \cdots + h_n^{(p)}(0)g_n$.

Ceci prouve que $f^{(p)}$ est combinaison linéaire de $g_1, \ldots, g_n$ et est donc un élément de E_f.

On en déduit que $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont dans E_f.

Or E_f est de dimension n. Les $n+1$ applications $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sont donc liées.

Autrement dit, il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels qu'on ait l'égalité $\lambda_0 f + \lambda_1 f' + \cdots + \lambda_n f^{(n)} = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ce résultat signifie effectivement que f est solution d'une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants. [Q]

6. Supposons que la dimension de E_f soit inférieure ou égale à 2.
La question précédente montre que l'application f est solution d'une équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ à coefficients constants.
Notons $(C) : at^2 + bt + c = 0$ l'équation caractéristique, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $a = 0$ donc si l'équation différentielle vérifiée par f s'écrit en fait $bf' + cf = 0$, alors f est multiple d'une application $x \to \exp(\lambda x)$ (avec par exemple $\lambda = 0$ si $c = 0$.)
Supposons dans les trois cas suivants que a est non nul.
- Si $\Delta > 0$, et si λ, μ sont les deux racines réelles distinctes de (C), alors f est une combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to \exp(\mu x)$.
- Si $\Delta < 0$ et si $z = \lambda + i\mu$, avec $\mu \neq 0$, est une racine complexe non réelle de (C) alors f est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)\cos(\mu x)$ et de $x \to \exp(\lambda x)\sin(\mu x)$.
- Si $\Delta = 0$ et si λ est la racine double de l'équation (C), alors f est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to x\exp(\lambda x)$.

Dans tous les cas, f est donc de l'un des types suivants, où $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ sont des réels :

- $x \to u(x) = \alpha\exp(\lambda x) + \beta\exp(\mu x)$.
- $x \to v(x) = (\alpha x + \beta)\exp(\lambda x)$.
- $x \to w(x) = \exp(\lambda x)(\alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x))$.

Inversement, pour chacune de ces applications, le sous-espace E_f correspondant est de dimension inférieure ou égale à 2.
En effet, comme on l'a fait dans la question (1), on vérifie que pour tout réel t :

- u_t est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to \exp(\mu x)$.
- v_t est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to x\exp(\lambda x)$.
- w_t est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)\cos(\mu x)$ et de $x \to \exp(\lambda x)\sin(\mu x)$.

Les formes u, v et w définissent donc toutes les applications f telles que $\dim E_f \leq 2$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021