# Translatées d'une application

On note $E$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour toute application $f$ de $E$ et pour tout réel $t$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t)$.
  On dit que l'application $f_t$, qui appartient à $E$, est une *translatée* de $f$.
- On note $E_f$ le sous-espace de $E$ engendré par les $f_t$, c'est-à-dire l'ensemble des applications $g$ de $E$ qui peuvent s'écrire au moins d'une manière sous la forme $g = \lambda_1 f_{t_1} + \lambda_2 f_{t_2} + \cdots + \lambda_p f_{t_p}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont des familles de $p$ réels quelconques ($p$ étant lui même un entier positif quelconque).

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que $E_f$ est de dimension finie et en donner une base formée de fonctions du type $f_t$ :
   (a) L'application $f$ est définie par : $f(x) = \exp(x)$ [S]
   (b) L'application $f$ est définie par : $f(x) = \sin x$ [S]
   (c) L'application $f$ est définie par : $f(x) = x$. [S]
2. Montrer que si $f$ est de la forme $x \to f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ , où $P$ est un polynôme et $\alpha$ un réel, alors $E_f$ est de dimension finie. [S]
3. On suppose que $f$ est définie par $f(x) = \exp(\exp x)$.
   Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ forment une famille libre.
   Qu'en déduit-on pour le sous-espace $E_f$ ? [S]
4. Dans cette question, on caractérise les familles libres finies de $E$ à l'aide d'un déterminant.
   (a) Soit $g_1$, $g_2$ une famille libre de $E$. Montrer qu'on peut trouver deux réels distincts $a_1$ et $a_2$ tels que le déterminant $\begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(a_2) \\ g_2(a_1) & g_2(a_2) \end{vmatrix}$ soit non nul. [S]
   (b) Montrer plus généralement que si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est une famille libre de $E$, on peut trouver $n$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincts deux à deux, tels que le déterminant $\Delta_n$, carré d'ordre $n$ et de terme général $\delta_{ij} = g_i(a_j)$, soit non nul. [S]
5. Soit $f$ un élément de $E$, tel que $\dim(E_f) = n \geq 1$. Soit $g_1, \ldots, g_n$ une base de $E_f$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique suite $h_1, \ldots, h_n$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \cdots + h_n(t)g_n(x)$. [S]
   (b) Montrer qu'on peut trouver $n$ réels $a_1, \ldots, a_n$ distincts deux à deux tels que pour tout $j$ de $\{1, \ldots, n\}$, $h_j$ soit combinaison linéaire de $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}$.
   Indication : utiliser 4b et considérer un certain système de Cramer.
   En conclure que $h_1, h_2, \ldots, h_n$ appartiennent à $E_f$. [S]
   (c) Montrer que les dérivées successives de $f$ sont dans $E_f$ (utiliser 5a.)
   En déduire que $f$ satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ à coefficients constants. [S]
6. Trouver tous les éléments $f$ de $E$ tels que $\dim E_f \leq 2$. [S]

# Corrigé du problème

1. (a) Soit $g$ un élément de $E_f$.

   Il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $t_1, \ldots, t_p$ tels que $g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_{t_k}$ c'est-à-dire tels que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ :

   $g(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k+x) = \Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k)\Big) \exp(x) = \mu f(x)$, avec $\mu = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k)$.

   Tout élément de $E_f$ est donc un multiple de $f$.

   La réciproque est évidente puisque $f = f_0$.

   On en déduit que $\dim E_f = 1$ et que $E_f = \mathbb{R}f$. [Q]

   (b) Pour tous réels $t$ et $x$, on a :

   $f_t(x) = \sin(t+x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\cos(x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\sin(x + \frac{\pi}{2})$.

   Autrement dit : $f_t = \cos(t) f_0 + \sin(t) f_{\pi/2}$.

   Toute combinaison linéaire des fonctions $f_t$, c'est-à-dire tout élément de $E_f$, est donc combinaison linéaire de $f_0$ et de $f_{\pi/2}$. La réciproque est évidente.

   Les fonctions $f_0$ et $f_{\pi/2}$ sont évidemment linéairement indépendantes.

   On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_{\pi/2}\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

   (c) Pour tous réels $t$ et $x$, on a : $f_t(x) = t+x = (1-t)x + t(x+1) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$.

   Autrement dit : $f_t = (1-t)f_0 + tf_1$. Toute combinaison linéaire des fonctions $f_t$ est donc combinaison linéaire de $f_0$ et de $f_1$. La réciproque est évidente.

   Enfin les applications $f_0$ et $f_1$ sont indépendantes.

   On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_1\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

2. Pour tous réels $t$ et $x$, $f_t(x) = f(t+x) = P(t+x)\exp(\alpha(t+x)) = \exp(\alpha t) P(t+x) \exp(\alpha x)$.

   Si $P$ est de degré $n$, le polynôme $x \to P(x+t)$ est également de degré $n$ et il est donc combinaison linéaire des fonctions $x \to x^k$, avex $0 \leq k \leq n$.

   On voit donc que $f_t$ est combinaison linéaire des $n+1$ fonctions $g_k : x \to x^k \exp(\alpha x)$, avec $0 \leq k \leq n$. Il en est donc de même des combinaisons linéaires des fonctions $f_t$, c'est-à-dire des éléments de $E_f$.

   Ainsi les $n+1$ applications $g_k$ constituent-elles une famille génératrice finie de $E_f$. On en déduit que $E_f$ est de dimension finie. Plus précisément, $\dim E_f \leq 1 + \deg P$. [Q]

3. Soit $n$ un entier naturel. On suppose par l'absurde que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont liées.

   Il existe donc $n+1$ réels non tous nuls $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

   Soit $r$ la valeur du plus grand indice $k$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

   L'égalité précédente s'écrit maintenant : $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f_k + \lambda_r f_r = 0$,

   c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(\mathrm{e}^k \mathrm{e}^x) + \lambda_r \exp(\mathrm{e}^r \mathrm{e}^x) = 0$.

Multiplions cette égalité par $\exp(-e^r e^x)$.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp((\underbrace{e^k - e^r}_{<0})e^x) + \lambda_r = 0$.

On fait tendre $x$ vers $+\infty$. On obtient alors $\lambda_r = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : pour tout entier $n$, la famille $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre.

On en déduit que $E_f$, qui contient des familles libres de cardinal quelconque, n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. [Q]

4. (a) Puisque $g_1$ et $g_2$ sont libres, $g_1$ n'est pas la fonction nulle.

Il existe donc un réel $a_1$ tel que $g_1(a_1)$ soit non nul.

Considérons alors l'application :

$x \to \delta_2(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & g_2(x) \end{vmatrix} = g_1(a_1)g_2(x) - g_2(a_1)g_1(x)$.

Autrement dit : $\delta_2 = g_1(a_1)g_2 - g_2(a_1)g_1$.

Puisque $g_1(a_1) \neq 0$, $\delta_2$ n'est pas l'application nulle, car sinon $g_1, g_2$ seraient liées.

Il existe donc un réel $a_2$ tel que $\Delta_2 = \delta_2(a_2)$ soit non nul, ce qu'il fallait démontrer.

NB : les réels $a_1$ et $a_2$ sont nécessairement distincts car $\delta_2(a_1) = 0$. [Q]

(b) On procède par récurrence sur $n$.

La propriété est vraie de façon évidente si $n = 1$, et la question précédente nous a montré qu'elle est vraie si $n = 2$.

On suppose qu'il en est de même au rang $n$ (avec $n \geq 1$ donné).

Soient $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ une famille de $n + 1$ fonctions indépendantes.

Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe $n$ réels $a_1, \ldots, a_n$, distincts deux à deux, tels que $\Delta_n = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \ldots & g_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \ldots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$ soit non nul.

On forme alors l'application $x \to \delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \ldots & g_1(a_n) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & \ldots & g_2(a_n) & g_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \ldots & g_n(a_n) & g_n(x) \\ g_{n+1}(a_1) & \ldots & g_{n+1}(a_n) & g_{n+1}(x) \end{vmatrix}$.

On développe ce déterminant par rapport à sa dernière colonne.

On voit alors que l'application $\delta_{n+1}$ peut s'écrire $\delta_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k g_k$, avec $\lambda_n = \Delta_n$.

On sait que le coefficient $\lambda_n$ est non nul et que les applications $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ sont libres. Il en découle que l'application $\delta_{n+1}$ ne peut pas être l'application nulle.

Il existe donc un réel $a_{n+1}$ tel que $\Delta_{n+1} = \delta_{n+1}(a_{n+1})$ soit non nul.

Enfin $a_{n+1}$ est différent de $a_1, \ldots, a_n$ car il est clair que $\delta_{n+1}$ s'annule en $a_1, \ldots, a_n$.

On a ainsi prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

5. (a) Pour tout réel $t$, l'application $f_t$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_n$ : $\exists!(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $f_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k g_k$.

Mais les coefficients $h_k$, définis de manière unique, sont en fait des fonctions de $t$.

L'égalité précédente s'écrit donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f_t = \sum_{k=1}^{n} h_k(t) g_k$,

c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_t(x) = f(x+t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t) g_k(x)$. [Q]

(b) On sait qu'il existe $n$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, distincts deux à deux, tels que la matrice $A$ carrée d'ordre $n$ et de terme général $a_{ij} = g_i(a_j)$ soit inversible.

Dans l'égalité vue en (5a) on choisit successivement $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$.

On obtient alors le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} g_1(a_1)h_1(t) + g_2(a_1)h_2(t) + \cdots + g_n(a_1)h_n(t) = f(a_1+t) & = f_{a_1}(t) \\ g_1(a_2)h_1(t) + g_2(a_2)h_2(t) + \cdots + g_n(a_2)h_n(t) = f(a_2+t) & = f_{a_2}(t) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ g_1(a_n)h_1(t) + g_2(a_n)h_2(t) + \cdots + g_n(a_n)h_n(t) = f(a_n+t) & = f_{a_n}(t) \end{cases}$$

Considérons ces égalités comme un système de $n$ équations linéaires relativement aux inconnues, $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$. La matrice de ce système est la matrice $A$ précédemment évoquée, dont on sait qu'elle est inversible.

On peut résoudre ce système (dont le déterminant est le $\Delta_n$ de la question 4b) en utilisant les formules de Cramer. Pour prendre l'exemple de $h_1(t)$, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_1(t) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} f_{a_1}(t) & g_2(a_1) & \ldots & g_n(a_1) \\ f_{a_2}(t) & g_2(a_2) & \ldots & g_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{a_n}(t) & g_2(a_n) & \ldots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe le déterminant du numérateur par rapport à sa première colonne, on constate que $h_1$ peut s'écrire sous la forme : $h_1 = \mu_1 f_{a_1} + \mu_2 f_{a_2} + \cdots + \mu_n f_{a_n}$.

L'application $h_1$ est donc combinaison linéaire des $f_{a_k}$, ce qui prouve qu'elle est dans $E_f$ (en particulier elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.)

Par un raisonnement identique, on voit que $h_2, \ldots, h_n$ appartiennent elles aussi à $E_f$ et sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ceci termine la démonstration de cette question. [Q]

(c) On connait l'égalité $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \cdots + h_n(t)g_n(x)$.

Les applications $h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_n$ sont dans $E_f$ et sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On peut alors dériver $p$ fois par rapport à la variable $t$.

Pour tout entier $p$, et tous réels $x$ et $t$, on a donc :

$f^{(p)}(x+t) = h_1^{(p)}(t)g_1(x) + h_2^{(p)}(t)g_2(x) + \cdots + h_n^{(p)}(t)g_n(x)$.

Posons alors $t = 0$. Il vient : $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} = h_1^{(p)}(0)g_1 + h_2^{(p)}(0)g_2 + \cdots + h_n^{(p)}(0)g_n$.

Ceci prouve que $f^{(p)}$ est combinaison linéaire de $g_1, \ldots, g_n$ et est donc un élément de $E_f$.

On en déduit que $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont dans $E_f$.

Or $E_f$ est de dimension $n$. Les $n+1$ applications $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sont donc liées.

Autrement dit, il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels qu'on ait l'égalité $\lambda_0 f + \lambda_1 f' + \cdots + \lambda_n f^{(n)} = 0$.

Ce résultat signifie effectivement que $f$ est solution d'une équation différentielle d'ordre $n$ à coefficients constants. [Q]

6. Supposons que la dimension de $E_f$ soit inférieure ou égale à 2.
La question précédente montre que l'application $f$ est solution d'une équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ à coefficients constants.
Notons $(C) : at^2 + bt + c = 0$ l'équation caractéristique, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

   – Si $a = 0$ donc si l'équation différentielle vérifiée par $f$ s'écrit en fait $bf' + cf = 0$, alors $f$ est multiple d'une application $x \to \exp(\lambda x)$ (avec par exemple $\lambda = 0$ si $c = 0$.)
   Supposons dans les trois cas suivants que $a$ est non nul.
   – Si $\Delta > 0$, et si $\lambda, \mu$ sont les deux racines réelles distinctes de (C), alors $f$ est une combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to \exp(\mu x)$.
   – Si $\Delta < 0$ et si $z = \lambda + i\mu$, avec $\mu \neq 0$, est une racine complexe non réelle de (C) alors $f$ est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)\cos(\mu x)$ et de $x \to \exp(\lambda x)\sin(\mu x)$.
   – Si $\Delta = 0$ et si $\lambda$ est la racine double de l'équation (C), alors $f$ est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to x\exp(\lambda x)$.

   Dans tous les cas, $f$ est donc de l'un des types suivants, où $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ sont des réels :

   – $x \to u(x) = \alpha\exp(\lambda x) + \beta\exp(\mu x)$.
   – $x \to v(x) = (\alpha x + \beta)\exp(\lambda x)$.
   – $x \to w(x) = \exp(\lambda x)(\alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x))$.

   Inversement, pour chacune de ces applications, le sous-espace $E_f$ correspondant est de dimension inférieure ou égale à 2.
   En effet, comme on l'a fait dans la question (1), on vérifie que pour tout réel $t$ :

   – $u_t$ est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to \exp(\mu x)$.
   – $v_t$ est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to x\exp(\lambda x)$.
   – $w_t$ est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)\cos(\mu x)$ et de $x \to \exp(\lambda x)\sin(\mu x)$.

   Les formes $u$, $v$ et $w$ définissent donc toutes les applications $f$ telles que $\dim E_f \leq 2$. [Q]