Une famille de matrices orthogonales

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3).
On donne quatre réels a, b, c, k tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $k \neq 0$.
On désigne par I la matrice identité d'ordre 3 .

Soit f le morphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $T = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

PREMIERE PARTIE

1. Calculer T^2. Exprimer T^3 en fonction de T. [S]
2. Trouver le rang de f et déterminer son noyau. [S]
3. Montrer que la matrice $B_k = kI + T$ est inversible. [S]
4. Montrer qu'il existe trois réels u, v, w, dépendants de k, tels que $B_k^{-1} = uI + vT + wT^2$. [S]
5. En déduire que les matrices $(kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ commutent. [S]

DEUXIEME PARTIE

On note g_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_k = (kI+T)^{-1}(kI-T)$ dans la base canonique.

1. Quels sont les vecteurs x de $\mathbb{R}^3$ tels que $g_k(x) = x$? [S]
2. Montrer que A_k est inversible et que $A_k^{-1} = {}^{\mathrm{T}}A_k = A_{-k}$. [S]
3. Montrer que $I + A_k$ est inversible et que : $T = k(I - A_k)(I + A_k)^{-1}$. [S]
4. Ecrire explicitement la matrice A_k en fonction de I, k, T, T^2. [S]
5. On pose $k = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$, avec -$\pi < \theta < \pi$.
   (a) On suppose d'abord $a = 1$ et $b = c = 0$.
   Identifier g_k à une transformation géométrique simple. [S]
   (b) On suppose $(b, c) \neq (0, 0)$. Montrer que les vecteurs $u_1 = (a, b, c)$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = -f^2(e_1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. [S]
   (c) Quelles sont les matrices $\widetilde{T}$ et $\widetilde{A}_k$ de f et de g_k dans cette base ? [S]
   (d) Soient k_1 et k_2 deux réels non nuls tels que $(k_1 + k_2)(1 - k_1 k_2) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe un réel non nul k tel que $g_k = g_{k_1} \mathrm{o} g_{k_2}$.
   Exprimer k en fonction de k_1 et de k_2. [S]

Corrigé du problème

PREMIERE PARTIE

1. On trouve $T^2 = \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$.

   De même, en utilisant l'égalité $a^2+b^2+c^2=1$

   $$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -(a^2+b^2+c^2)c & (a^2+b^2+c^2)b \\ (a^2+b^2+c^2)c & 0 & -(a^2+b^2+c^2)a \\ -(a^2+b^2+c^2)b & (a^2+b^2+c^2)a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = -T$$

   [Q]

2. Pour tout vecteur $u=(x,y,z)$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy-bz \\ -cx+az \\ bx-ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Connaissant les propriétés du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, on en déduit que :
   $$f(u)=0 \iff u \text{ est lié au vecteur } \omega=(a,b,c).$$
   Le noyau de f est donc la droite vectorielle engendrée par (a,b,c).
   On en déduit que le rang de f est 2 : en effet $\dim \mathbb{R}^3 = \mathrm{rg}(f) + \dim \ker f$.
   Mais $f(u) = u\wedge(a,b,c) \Rightarrow$ Imf est inclus dans le plan orthogonal à (a,b,c).
   Pour des raisons de dimension, Imf est donc le plan orthogonal à (a,b,c), c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $u=(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz=0$.

   Remarque : L'interprétation vectorielle de la matrice T permet une nouvelle démonstration de l'égalité $T^3=-T$. Il suffit en effet de vérifier que $f^3=-f$.
   Or pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$:
   $$\begin{aligned} f^2(u) &= f(u)\wedge\omega = (u\wedge\omega)\wedge\omega = \omega\wedge(\omega\wedge u) \\ &= (\omega\cdot u)\omega - (\omega\cdot\omega)u = (\omega\cdot u)\omega - u \text{ (car } \omega \text{ est unitaire)} \end{aligned}$$
   On en déduit :
   $f^3(u) = ((\omega\cdot u)\omega - u)\wedge\omega = -u\wedge\omega = -f(u)$. [Q]

3. On vérifie que $\det(B_k) = \begin{vmatrix} k & c & -b \\ -c & k & a \\ b & -a & k \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+k^2)k = (1+k^2)k \neq 0$.

   On en déduit que B_k est inversible.

   Il y a une deuxième démonstration qui consiste à vérifier que $f_k = f + k\,\mathrm{Id}$ est injective (donc est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).
   Soit u un vecteur de $\ker f_k$: $f_k(u) = \overrightarrow{0} \iff u\wedge\omega + k\,u = \overrightarrow{0}$.
   Si on multiplie scalairement cette égalité par u, on trouve $k\,\|u\|^2 = 0$ et donc $u=0$. [Q]

4. Il suffit de trouver trois réels u, v, w tels que $(uI+vT+wT^2)B_k=I$.
$$\begin{aligned}(uI+vT+wT^2)B_k=I &\iff (uI+vT+wT^2)(kI+T)=I\\ &\iff kuI+(u+kv)T+(v+kw)T^2+wT^3=I\\ &\iff kuI+(u+kv-w)T+(v+kw)T^2=I\end{aligned}$$
L'égalité est réalisée si $\begin{cases}ku=1\\ u+kv-w=0\\ v+kw=0\end{cases}$ donc si $\begin{cases}u=\frac{1}{k}\\ v=-\frac{1}{k^2+1}\\ w=\frac{1}{k(k^2+1)}\end{cases}$
Conclusion : on a $B_k^{-1}=\dfrac{1}{k}I-\dfrac{1}{k^2+1}T+\dfrac{1}{k(k^2+1)}T^2$.

Il y a une autre méthode, qui utilise l'égalité $T^3=-T$.
En effet $T=B_k-kI$ et :
$$\begin{aligned}T^3=-T &\Rightarrow (B_k-kI)^3=kI-B_k \Rightarrow B_k^3-3kB_k^2+3k^2B_k-k^3I=kI-B_k\\ &\Rightarrow B_k(B_k^2-3kB_k+(3k^2+1)I)=k(k^2+1)I\end{aligned}$$
Ce calcul montre que B_k est inversible, avec :
$$\begin{aligned}B_k^{-1} &=\frac{1}{k(k^2+1)}(B_k^2-3kB_k+(3k^2+1)I)\\ &=\frac{1}{k(k^2+1)}((T+kI)^2-3k(T+kI)+(3k^2+1)I)\\ &=\frac{1}{k(k^2+1)}(T^2-kT+(k^2+1)I)=\frac{1}{k}I-\frac{1}{k^2+1}T+\frac{1}{k(k^2+1)}T^2\end{aligned}$$
[Q]

5. Les matrices $B_k^{-1}=(kI+T)^{-1}$ et $kI-T$ sont des combinaisons linéaires des matrices I, T et T^2 qui commutent entre elles deux à deux.
On en déduit que les matrices $(kI+T)^{-1}$ et $kI-T$ commutent. [Q]

DEUXIEME PARTIE

On note g_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_k=(kI+T)^{-1}(kI-T)$ dans la base canonique.

1. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et X la matrice colonne associée :
$$\begin{aligned}g_k(x) &=x \iff A_kX=X \iff (kI+T)^{-1}(kI-T)X=X\\ &\iff (kI-T)X=(kI+T)X \iff TX=0 \iff x\in\ker f\end{aligned}$$
On obtient donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\omega=(a,b,c)$. [Q]
2. La matrice T est antisymétrique.
On en déduit, en se souvenant que $(kI+T)^{-1}$ et $kI-T$ commutent :
${}^{\mathrm{T}}A_k={}^{\mathrm{T}}(kI-T)^{\mathrm{T}}(kI+T)^{-1}=(kI+T)(kI-T)^{-1}=((kI+T)^{-1}(kI-T))^{-1}=A_k^{-1}$.
De même $A_{-k}=(-kI+T)^{-1}(-kI-T)=(kI-T)^{-1}(kI+T)=(kI+T)(kI-T)^{-1}={}^{\mathrm{T}}A_k$.
[Q]
3. Pour toute matrice colonne X,
$$\begin{aligned}(I+A_k)X=0 &\iff A_kX=-X \iff (kI+T)^{-1}(kI-T)X=-X\\ &\iff (kI-T)X=-(kI+T)X \iff 2kX=0 \iff X=0\end{aligned}$$
Le "noyau" de $I+A_k$ est donc réduit à 0 : cette matrice est inversible.

Par définition de A_k, on a : $(kI+T)A_k = kI - T$ et donc $T(A_k+I) = k(I-A_k)$.
Compte tenu de l'inversibilité de (A_k+I), on trouve $T = k(I-A_k)(I+A_k)^{-1}$. [Q]

4. Après développement et simplification, en utilisant $T^3 = -T$, on trouve :
$A_k = B_k^{-1}(kI-T) = \Big[\dfrac{1}{k}\,I - \dfrac{1}{k^2+1}\,T + \dfrac{1}{k(k^2+1)}\,T^2\Big](kI-T) = I - \dfrac{2k}{k^2+1}T + \dfrac{2}{k^2+1}T^2$
[Q]

5. (a) Pour tous a, b, c, et avec cette définition de k, on a :
$k = \dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}, \qquad \dfrac{2}{k^2+1} = 2\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}) = 1+\cos(\pi-\theta) = 1-\cos\theta$
$\dfrac{2k}{k^2+1} = 2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}) = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta.$
On en déduit $A_k = I - (\sin\theta)T + (1-\cos\theta)T^2$.
Avec $a=1$ et $b=c=0$, on trouve $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On en déduit : $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
g_k est donc la rotation d'angle θ autour du vecteur e_1. [Q]

(b) La matrice de u_1, u_2, u_3 dans la base e_1, e_2, e_3 est $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b^2+c^2 \\ b & -c & -ab \\ c & b & -ac \end{pmatrix}$.
Son déterminant est :
$a(ac^2+ab^2) + (b^2+c^2)(b^2+c^2) = (b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2) = b^2+c^2 \neq 0.$
On en déduit que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. [Q]

(c) On sait que $f(u_1) = 0$.
D'autre part $f(u_2) = f^2(e_1) = -u_3$ et $f(u_3) = -f^3(e_1) = f(e_1) = u_2$.
La matrice de f dans la base u_1, u_2, u_3 est donc : $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
On se retrouve ramené au cas précédent : $\widetilde{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ [Q]

(d) La base u_1, u_2, u_3 utilisée précédemment ne dépend pas de k.
Pour répondre à cette question, il suffit donc de trouver θ tel que $\widetilde{A}_k = \widetilde{A}_{k_1}\widetilde{A}_{k_2}$.
Or de manière évidente, et en notant θ_1 et θ_2 les angles associés à k_1 et k_2 :

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{k_1}\widetilde{A}_{k_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Autrement dit, $\widetilde{A}_{k_1}\,\widetilde{A}_{k_2}=\widetilde{A}_k$, où k est donné par $k=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2))$.
Notons pour simplifier $t_1=\tan\frac{\theta_1}{2}$ et $t_2=\tan\frac{\theta_2}{2}$.
On trouve : $k=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)}=\dfrac{1-t_1t_2}{t_1+t_2}=\dfrac{1-\frac{1}{k_1k_2}}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}=\dfrac{k_1k_2-1}{k_1+k_2}$.
Pour cette valeur de k, on a bien $g_k=g_{k_1}\text{o}g_{k_2}$. [Q]

Remarque :

Revenons au début de la question 5.

En termes d'applications linéaires : $g_k=\text{Id}-(\sin\theta)f+(1-\cos\theta)f^2$.

Donc pour tout vecteur x :

$$\begin{aligned} g_k(x) &= x-\sin\theta(x\wedge\omega)+(1-\cos\theta)((\omega\cdot x)\omega-x)\\ &=(\cos\theta)x+(\sin\theta)\omega\wedge x+(1-\cos\theta)(\omega\cdot x)\omega \end{aligned}$$

Notons $p(x)=(\omega\cdot x)\omega$ la projection orthogonale de x sur le vecteur unitaire ω.

$g_k(x)=(\cos\theta)(x-p(x))+(\sin\theta)\omega\wedge x+p(x)$.

Notons $q(x)=(\cos\theta)(x-p(x))+(\sin\theta)\omega\wedge x$. Ainsi $g_k(x)=q(x)+p(x)$.

On en déduit que g_k est la rotation d'angle θ autour du vecteur ω (voir figure).

Il est donc normal que la composée de g_{k_1} (rotation d'angle θ_1 autour de ω) et de g_{k_2} (rotation d'angle θ_2 autour de ω) soit la rotation d'angle $\theta=\theta_1+\theta_2$ autour de ω.