Une famille de matrices orthogonales

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3).
On donne quatre réels a, b, c, k tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $k \neq 0$.
On désigne par I la matrice identité d'ordre 3 .

Soit f le morphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $T = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

PREMIERE PARTIE

1. Calculer T^2. Exprimer T^3 en fonction de T. [S]
2. Trouver le rang de f et déterminer son noyau. [S]
3. Montrer que la matrice $B_k = kI + T$ est inversible. [S]
4. Montrer qu'il existe trois réels u, v, w, dépendants de k, tels que $B_k^{-1} = uI + vT + wT^2$. [S]
5. En déduire que les matrices $(kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ commutent. [S]

DEUXIEME PARTIE

On note g_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_k = (kI+T)^{-1}(kI-T)$ dans la base canonique.

1. Quels sont les vecteurs x de $\mathbb{R}^3$ tels que $g_k(x) = x$? [S]
2. Montrer que A_k est inversible et que $A_k^{-1} = {}^{\mathrm{T}}A_k = A_{-k}$. [S]
3. Montrer que $I + A_k$ est inversible et que : $T = k(I - A_k)(I + A_k)^{-1}$. [S]
4. Ecrire explicitement la matrice A_k en fonction de I, k, T, T^2. [S]
5. On pose $k = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$, avec $-\pi < \theta < \pi$.
   (a) On suppose d'abord $a = 1$ et $b = c = 0$.
   Identifier g_k à une transformation géométrique simple. [S]
   (b) On suppose $(b, c) \neq (0, 0)$. Montrer que les vecteurs $u_1 = (a, b, c)$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = -f^2(e_1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. [S]
   (c) Quelles sont les matrices $\widetilde{T}$ et $\widetilde{A}_k$ de f et de g_k dans cette base ? [S]
   (d) Soient k_1 et k_2 deux réels non nuls tels que $(k_1 + k_2)(1 - k_1k_2) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe un réel non nul k tel que $g_k = g_{k_1} \circ g_{k_2}$.
   Exprimer k en fonction de k_1 et de k_2. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

PREMIERE PARTIE

1. On trouve $T^2 = \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$.

   De même, en utilisant l'égalité $a^2+b^2+c^2=1$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -(a^2+b^2+c^2)c & (a^2+b^2+c^2)b \\ (a^2+b^2+c^2)c & 0 & -(a^2+b^2+c^2)a \\ -(a^2+b^2+c^2)b & (a^2+b^2+c^2)a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = -T$$

   [Q]

2. Pour tout vecteur $u=(x,y,z)$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy-bz \\ -cx+az \\ bx-ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Connaissant les propriétés du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, on en déduit que :

$$f(u)=0 \iff u \text{ est lié au vecteur } \omega=(a,b,c).$$

   Le noyau de f est donc la droite vectorielle engendrée par (a,b,c).

   On en déduit que le rang de f est 2 : en effet $\dim \mathbb{R}^3 = \mathrm{rg}(f) + \dim \ker f$.

   Mais $f(u) = u \wedge (a,b,c) \Rightarrow$ Imf est inclus dans le plan orthogonal à (a,b,c).

   Pour des raisons de dimension, Imf est donc le plan orthogonal à (a,b,c), c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $u=(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz=0$.

   Remarque : L'interprétation vectorielle de la matrice T permet une nouvelle démonstration de l'égalité $T^3=-T$. Il suffit en effet de vérifier que $f^3=-f$.

   Or pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f^2(u) &= f(u)\wedge\omega = (u\wedge\omega)\wedge\omega = \omega\wedge(\omega\wedge u) \\ &= (\omega\cdot u)\omega - (\omega\cdot\omega)u = (\omega\cdot u)\omega - u \text{ (car } \omega \text{ est unitaire)} \end{aligned}$$

   On en déduit :

   $f^3(u) = ((\omega\cdot u)\omega - u)\wedge\omega = -u\wedge\omega = -f(u)$. [Q]

3. On vérifie que $\det(B_k) = \begin{vmatrix} k & c & -b \\ -c & k & a \\ b & -a & k \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+k^2)k = (1+k^2)k \neq 0$.

   On en déduit que B_k est inversible.

   Il y a une deuxième démonstration qui consiste à vérifier que $f_k = f + k\,\mathrm{Id}$ est injective (donc est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).

   Soit u un vecteur de $\ker f_k$: $f_k(u)=\overrightarrow{0} \iff u\wedge\omega + k\,u = \overrightarrow{0}$.

   Si on multiplie scalairement cette égalité par u, on trouve $k\,\|u\|^2=0$ et donc $u=0$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4. Il suffit de trouver trois réels u, v, w tels que $(uI+vT+wT^2)B_k = I$.
$(uI+vT+wT^2)B_k = I \iff (uI+vT+wT^2)(kI+T) = I$
$\iff kuI+(u+kv)T+(v+kw)T^2+wT^3 = I$
$\iff kuI+(u+kv-w)T+(v+kw)T^2 = I$

L'égalité est réalisée si $\begin{cases} ku = 1 \\ u+kv-w = 0 \\ v+kw = 0 \end{cases}$ donc si $\begin{cases} u = \frac{1}{k} \\ v = -\frac{1}{k^2+1} \\ w = \frac{1}{k(k^2+1)} \end{cases}$

Conclusion : on a $B_k^{-1} = \dfrac{1}{k}I - \dfrac{1}{k^2+1}T + \dfrac{1}{k(k^2+1)}T^2$.

Il y a une autre méthode, qui utilise l'égalité $T^3 = -T$.
En effet $T = B_k - kI$ et :
$T^3 = -T \Rightarrow (B_k-kI)^3 = kI - B_k \Rightarrow B_k^3 - 3kB_k^2 + 3k^2B_k - k^3I = kI - B_k$
$\Rightarrow B_k(B_k^2 - 3kB_k + (3k^2+1)I) = k(k^2+1)I$

Ce calcul montre que B_k est inversible, avec :
$$\begin{aligned} B_k^{-1} &= \frac{1}{k(k^2+1)}(B_k^2 - 3kB_k + (3k^2+1)I) \\ &= \frac{1}{k(k^2+1)}((T+kI)^2 - 3k(T+kI) + (3k^2+1)I) \qquad [Q] \\ &= \frac{1}{k(k^2+1)}(T^2 - kT + (k^2+1)I) = \frac{1}{k}I - \frac{1}{k^2+1}T + \frac{1}{k(k^2+1)}T^2 \end{aligned}$$

5. Les matrices $B_k^{-1} = (kI+T)^{-1}$ et $kI-T$ sont des combinaisons linéaires des matrices I, T et T^2 qui commutent entre elles deux à deux.
On en déduit que les matrices $(kI+T)^{-1}$ et $kI-T$ commutent. [Q]

DEUXIEME PARTIE

On note g_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_k = (kI+T)^{-1}(kI-T)$ dans la base canonique.

1. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et X la matrice colonne associée :
$g_k(x) = x \iff A_kX = X \iff (kI+T)^{-1}(kI-T)X = X$
$\iff (kI-T)X = (kI+T)X \iff TX = 0 \iff x \in \ker f$
On obtient donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\omega = (a,b,c)$. [Q]

2. La matrice T est antisymétrique.
On en déduit, en se souvenant que $(kI+T)^{-1}$ et $kI-T$ commutent :
${}^{\mathrm{T}}A_k = {}^{\mathrm{T}}(kI-T)^{\mathrm{T}}(kI+T)^{-1} = (kI+T)(kI-T)^{-1} = ((kI+T)^{-1}(kI-T))^{-1} = A_k^{-1}$.
De même $A_{-k} = (-kI+T)^{-1}(-kI-T) = (kI-T)^{-1}(kI+T) = (kI+T)(kI-T)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}A_k$.
[Q]

3. Pour toute matrice colonne X,
$(I+A_k)X = 0 \iff A_kX = -X \iff (kI+T)^{-1}(kI-T)X = -X$
$\iff (kI-T)X = -(kI+T)X \iff 2kX = 0 \iff X = 0$
Le "noyau" de $I+A_k$ est donc réduit à 0 : cette matrice est inversible.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Par définition de A_k, on a : $(kI+T)A_k = kI - T$ et donc $T(A_k+I) = k(I-A_k)$.
Compte tenu de l'inversibilité de (A_k+I), on trouve $T = k(I-A_k)(I+A_k)^{-1}$. [Q]

4. Après développement et simplification, en utilisant $T^3 = -T$, on trouve :
$A_k = B_k^{-1}(kI-T) = \left[\frac{1}{k}I - \frac{1}{k^2+1}T + \frac{1}{k(k^2+1)}T^2\right](kI-T) = I - \frac{2k}{k^2+1}T + \frac{2}{k^2+1}T^2$
[Q]

5. (a) Pour tous a, b, c, et avec cette définition de k, on a :
$k = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$, $\quad \frac{2}{k^2+1} = 2\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}) = 1+\cos(\pi-\theta) = 1-\cos\theta$
$\frac{2k}{k^2+1} = 2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}) = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta.$
On en déduit $A_k = I - (\sin\theta)T + (1-\cos\theta)T^2$.
Avec $a=1$ et $b=c=0$, on trouve $T = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ et $T^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
On en déduit : $A_k = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.
g_k est donc la rotation d'angle θ autour du vecteur e_1. [Q]

(b) La matrice de u_1, u_2, u_3 dans la base e_1, e_2, e_3 est $M = \begin{pmatrix}a&0&b^2+c^2\\b&-c&-ab\\c&b&-ac\end{pmatrix}$.
Son déterminant est :
$a(ac^2+ab^2) + (b^2+c^2)(b^2+c^2) = (b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2) = b^2+c^2 \neq 0.$
On en déduit que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. [Q]

(c) On sait que $f(u_1) = 0$.
D'autre part $f(u_2) = f^2(e_1) = -u_3$ et $f(u_3) = -f^3(e_1) = f(e_1) = u_2$.
La matrice de f dans la base u_1, u_2, u_3 est donc : $\widetilde{T} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.
On se retrouve ramené au cas précédent : $\widetilde{A}_k = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ [Q]

(d) La base u_1, u_2, u_3 utilisée précédemment ne dépend pas de k.
Pour répondre à cette question, il suffit donc de trouver θ tel que $\widetilde{A}_k = \widetilde{A}_{k_1}\widetilde{A}_{k_2}$.
Or de manière évidente, et en notant θ_1 et θ_2 les angles associés à k_1 et k_2 :

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{k_1}\widetilde{A}_{k_2} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\0&\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_2&-\sin\theta_2\\0&\sin\theta_2&\cos\theta_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\theta_1+\theta_2)&-\sin(\theta_1+\theta_2)\\0&\sin(\theta_1+\theta_2)&\cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Autrement dit, $\widetilde{A}_{k_1}\,\widetilde{A}_{k_2} = \widetilde{A}_k$, où k est donné par $k = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2))$.
Notons pour simplifier $t_1 = \tan\frac{\theta_1}{2}$ et $t_2 = \tan\frac{\theta_2}{2}$.
On trouve : $k = \dfrac{1}{\tan(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2})} = \dfrac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \dfrac{1 - \frac{1}{k_1 k_2}}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \dfrac{k_1 k_2 - 1}{k_1 + k_2}$.
Pour cette valeur de k, on a bien $g_k = g_{k_1} \circ g_{k_2}$. [Q]

Remarque :
Revenons au début de la question 5.
En termes d'applications linéaires : $g_k = \mathrm{Id} - (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2$.

Donc pour tout vecteur x :

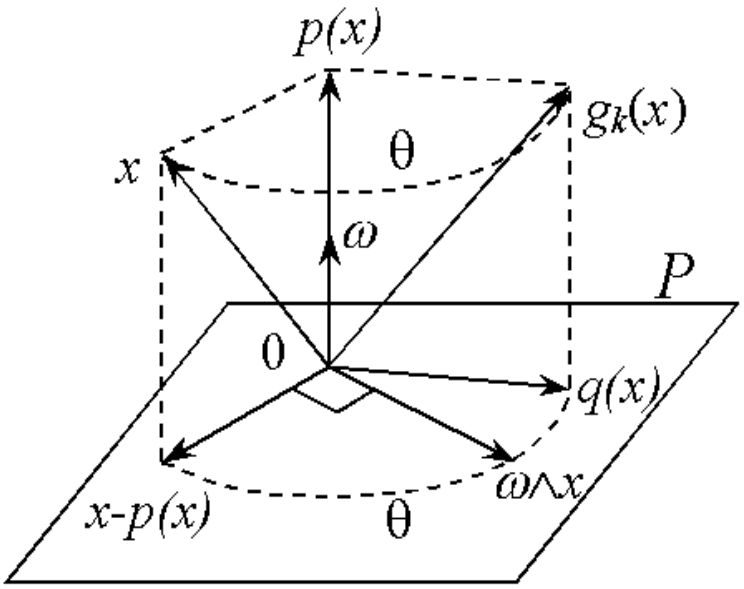
$$\begin{aligned} g_k(x) &= x - \sin\theta(x \wedge \omega) + (1 - \cos\theta)((\omega \cdot x)\omega - x) \\ &= (\cos\theta)x + (\sin\theta)\omega \wedge x + (1 - \cos\theta)(\omega \cdot x)\omega \end{aligned}$$

Notons $p(x) = (\omega \cdot x)\omega$ la projection orthogonale de x sur le vecteur unitaire ω.
$g_k(x) = (\cos\theta)(x - p(x)) + (\sin\theta)\omega \wedge x + p(x)$.

Notons $q(x) = (\cos\theta)(x - p(x)) + (\sin\theta)\omega \wedge x$. Ainsi $g_k(x) = q(x) + p(x)$.

On en déduit que g_k est la rotation d'angle θ autour du vecteur ω (voir figure).

Il est donc normal que la composée de g_{k_1} (rotation d'angle θ_1 autour de ω) et de g_{k_2} (rotation d'angle θ_2 autour de ω) soit la rotation d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2$ autour de ω.



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021