



# Nombres de Bernoulli, formule d'Euler-MacLaurin

(D'après l'épreuve de Maths 1 du concours Centrale-Supélec 1999, Option PC)

## Partie I. Nombres de Bernoulli

Les polynômes considérés dans ce problème sont à coefficients réels, et ils sont identifiés à leur fonction polynomiale associée.

### 1. Suite des polynômes de Bernoulli

(a) Montrer qu'il existe une et une seule suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes vérifiant

$$B_0 = 1, \text{ et pour tout entier } n \geq 1 : B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t) dt = 0.$$

(b) Montrer que chaque  $B_n$  est unitaire de degré  $n$ . Déterminer  $B_1, B_2, B_3$ .

(c) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$ , on pose :  $C_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$ .

Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a l'égalité :  $C_n = B_n$ .

### 2. Nombres de Bernoulli

(a) Vérifier que  $B_0(1) = B_0(0) = 1, B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$ .

Prouver que pour tout  $n \geq 2, B_n(1) = B_n(0)$ .

(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $b_n = B_n(0)$ . Montrer que pour tout entier  $p \geq 1, b_{2p+1} = 0$ .

## Partie II. Fonction génératrice des polynômes de Bernoulli

### 1. Définition de la fonction génératrice $\phi$

(a) On note  $u$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $x \mapsto u(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ .

Montrer que  $u$  admet un prolongement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (considérer  $1/u$ ).

(b) On note  $\phi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $\phi(x, t) = \frac{xe^{tx}}{e^x - 1}$  si  $x \neq 0$  et  $\phi(0, t) = 1$ .

Déduire de la question précédente que  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

(c) Pour  $t$  réel fixé, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \phi(x, t)$ .

(d) Expliciter  $\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t)$  en fonction de  $\phi(x, t)$ .

(e) Pour tout  $n \geq 1$ , montrer que :  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) = x \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) + n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \phi(x, t)$

### 2. Utilisation de la fonction génératrice $\phi$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et tout réel  $t$  on pose  $a_n(t) = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(0, t)$  c'est-à-dire  $a_n(t) = \left[ \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) \right]_{x=0}$

(a) Vérifier que  $a_0 = 1$  puis pour tout entier  $n \geq 1$  que  $a'_n = na_{n-1}$  et  $\int_0^1 a_n(t) dt = 0$ .

(Pour le calcul de  $\int_0^1 a_n(t) dt$  on pourra déterminer  $\int_0^1 \phi(x, t) dt$ .)

(b) En déduire que la fonction  $a_n$  est polynomiale et que  $a_n = B_n$ .

(c) Déterminer de deux manières le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de l'application qui à  $x$  associe  $\frac{e^x - 1}{x} \phi(x, t)$ .

En déduire l'égalité :  $B_n(t) = t^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B_k(t)$ .

(d) Donner une relation permettant de calculer les nombres de Bernoulli  $b_n$ .

(e) Écrire un algorithme permettant d'obtenir la valeur de  $b_{2n}$  ( $n \geq 1$ ).

Donner la valeur (exacte ou approchée) de  $b_{10}$ .

### Partie III. Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

#### 1. Formule sommatoire sur le segment $[0, 1]$

Dans cette question,  $f$  est une fonction de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{2p}$  où  $p$  est un entier supérieur à 1. Pour tout entier  $k$  de  $\{0, \dots, p\}$  on pose  $R_k = \int_0^1 \frac{f^{(2k)}(t) B_{2k}(t)}{(2k)!} dt$ , où  $f^{(2k)}$  désigne la dérivée  $2k$ -ième de  $f$ .

(a) Exprimer  $R_0$  en fonction de  $R_1$ .

(b) Pour tout entier  $k \geq 1$ , exprimer  $R_k$  en fonction de  $R_{k+1}$ .

(c) En déduire :  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)] + R_p$ .

#### 2. Formule sommatoire sur un segment quelconque

Dans cette question :

–  $a, b$  sont deux réels ( $a < b$ ), et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^{2p}$  avec  $p \geq 1$ .

– Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

On considère la subdivision de  $[a, b]$  définie par  $a_k = a + kh$ , avec  $h = \frac{b-a}{n}$  et  $0 \leq k \leq n$ .

– Pour tout réel  $x$  on note  $\langle x \rangle = x - E(x)$  où  $E(x)$  désigne la partie entière du réel  $x$ .

(a) Montrer que :  $\int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}(\langle \frac{u-a}{h} \rangle) du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g^{(2p)}(u) B_{2p}(\frac{u-a_k}{h}) du$

(b) Montrer que :

$$\int_a^b g(t) dt = h \left[ \frac{g(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g(a+kh) + \frac{g(b)}{2} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} h^{2j} \left[ g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a) \right] + r_{p,n}$$

$$\text{où } r_{p,n} = \frac{h^{2p}}{(2p)!} \int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}(\frac{u-a_k}{h}) du.$$

On vient d'obtenir la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin.



### 3. Application

$\alpha$  désigne un réel de  $]0, 1[$ , et  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

On se propose de déterminer un équivalent de  $S_n = \sum_{k=1}^n e^{ik^\alpha}$ .

On note  $g$  l'application  $t \mapsto e^{it^\alpha}$ .

(a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $\int_1^{n+1} g(t) dt$  et de dérivées successives de  $g$ .

(b) Montrer que quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $I_n = \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{1/\alpha-1} dx$  est équivalente à  $-ie^{in^\alpha} n^{1-\alpha}$ .

(c) En déduire un équivalent de  $\int_1^n e^{it^\alpha} dt$ .

(d) Montrer que pour tout  $j$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $g^{(j)}(n) = O(n^{j(\alpha-1)})$  quand  $n$  tend vers l'infini.

(e) On pose  $J_n = \int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(\langle t-1 \rangle) dt$ .

Déterminer  $p$  dans  $\mathbb{N}$  tel que la suite de terme général  $J_n$  soit bornée.

(on pourra poser  $M_{2p} = \sup\{|B_{2p}(t)|, 0 \leq t \leq 1\}$ .)

(f) En déduire un équivalent de  $S_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.