Nombres de Bernoulli, formule d'Euler-MacLaurin

(D'après l'épreuve de Maths 1 du concours Centrale-Supélec 1999, Option PC)

Partie I. Nombres de Bernoulli

Les polynômes considérés dans ce probl'eme sont à coefficients réels, et ils sont identifiés à leur fonction polynomiale associée.

1. **Suite des polynômes de Bernoulli**
   (a) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant
   $B_0 = 1$, et pour tout entier $n \geq 1$: $B_n' = nB_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (b) Montrer que chaque B_n est unitaire de degré n. Déterminer B_1, B_2, B_3.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, on pose : $C_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$.
   Montrer que pour tout entier naturel n on a l'égalité : $C_n = B_n$.
2. **Nombres de Bernoulli**
   (a) Vérifier que $B_0(1) = B_0(0) = 1$, $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$.
   Prouver que pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $b_n = B_n(0)$. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

Partie II. Fonction génératrice des polynômes de Bernoulli

1. **Définition de la fonction génératrice ϕ**
   (a) On note u l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto u(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$.
   Montrer que u admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (considérer $1/u$).
   (b) On note ϕ l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\phi(x,t) = \dfrac{x\mathrm{e}^{tx}}{\mathrm{e}^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $\phi(0,t) = 1$.
   Déduire de la question précédente que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Pour t réel fixé, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \phi(x,t)$.
   (d) Expliciter $\dfrac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)$ en fonction de $\phi(x,t)$.
   (e) Pour tout $n \geq 1$, montrer que : $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x,t) = x\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x,t) + n\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\phi(x,t)$
2. **Utilisation de la fonction génératrice ϕ**
   Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout réel t on pose $a_n(t) = \dfrac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(0,t)$ c'est-à-dire $a_n(t) = \left[\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x,t)\right]_{x=0}$

(a) Vérifier que $a_0 = 1$ puis pour tout entier $n \geq 1$ que $a'_n = n a_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 a_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(Pour le calcul de $\displaystyle\int_0^1 a_n(t)\,\mathrm{d}t$ on pourra déterminer $\displaystyle\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t$.)

(b) En déduire que la fonction a_n est polynomiale et que $a_n = B_n$.

(c) Déterminer de deux manières le développement limité à l'ordre n en 0 de l'application qui à x associe $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\phi(x,t)$.

En déduire l'égalité : $B_n(t) = t^n - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k}\, B_k(t)$.

(d) Donner une relation permettant de calculer les nombres de Bernoulli b_n.

(e) Écrire un algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_{2n} $(n \geq 1)$.
Donner la valeur (exacte ou approchée) de b_{10}.

Partie III. Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

1. **Formule sommatoire sur le segment** $[0,1]$

Dans cette question, f est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2p}$ où p est un entier supérieur à 1. Pour tout entier k de $\{0,\ldots,p\}$ on pose $R_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{f^{(2k)}(t)B_{2k}(t)}{(2k)!}\,\mathrm{d}t$, où $f^{(2k)}$ désigne la dérivée $2k$-ième de f.

(a) Exprimer R_0 en fonction de R_1.

(b) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer R_k en fonction de R_{k+1}.

(c) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\Big[f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\Big] + R_p$.

2. **Formule sommatoire sur un segment quelconque**

Dans cette question :
- a, b sont deux réels $(a < b)$, et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{2p}$ avec $p \geq 1$.
- Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
  On considère la subdivision de $[a,b]$ définie par $a_k = a + kh$, avec $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $0 \leq k \leq n$.
- Pour tout réel x on note $< x > = x - \mathrm{E}(x)$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Montrer que : $\displaystyle\int_a^b g^{(2p)}(u)B_{2p}(\langle\frac{u-a}{h}\rangle)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g^{(2p)}(u)B_{2p}(\frac{u-a_k}{h})\,\mathrm{d}u$

(b) Montrer que :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = h\Big[\frac{g(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g(a+kh) + \frac{g(b)}{2}\Big] - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}h^{2j}\Big[g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)\Big] + r_{p,n}$$

où $r_{p,n} = \dfrac{h^{2p}}{(2p)!}\displaystyle\int_a^b g^{(2p)}(u)B_{2p}(\frac{u-a_k}{h})\,\mathrm{d}u$.

On vient d'obtenir la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin.

3. **Application**

   α désigne un réel de $]0,1[$, et i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

   On se propose de déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik^\alpha}$.

   On note g l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{it^\alpha}$.

   (a) Exprimer S_n en fonction de $\displaystyle\int_1^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ et de dérivées successives de g.

   (b) Montrer que quand $n \to +\infty$, $I_n = \displaystyle\int_1^{n^\alpha} \mathrm{e}^{ix} x^{1/\alpha-1}\,\mathrm{d}x$ est équivalente à $-i\mathrm{e}^{in^\alpha} n^{1-\alpha}$.

   (c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_1^{n} \mathrm{e}^{it^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

   (d) Montrer que pour tout j de $\mathbb{N}^*$, $g^{(j)}(n) = \mathrm{O}(n^{j(\alpha-1)})$ quand n tend vers l'infini.

   (e) On pose $J_n = \displaystyle\int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(< t-1 >)\,\mathrm{d}t$.
   Déterminer p dans $\mathbb{N}$ tel que la suite de terme général J_n soit bornée.
   (on pourra poser $M_{2p} = \sup\{|B_{2p}(t)|\,, 0 \le t \le 1\}$.)

   (f) En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini.