Résolution itérative d'un système linéaire

D'après l'épreuve de Maths 3 du concours E3A, option PC, année 1999

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est noté $A = (a_{ij})$.

On identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et les matrices de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On rappelle que pour toute norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = B \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n - B\| = 0$.

Les coefficients de la matrice limite B sont alors les limites des coefficients de la matrice A_n.

Partie I

1. Montrer qu'on définit une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ en posant $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le p} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$ [S]
2. Montrer que si le produit AB est possible, $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$. [S]
3. Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on note $(\lambda_i)_{1\le i\le p}$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ et $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le p} |\lambda_i|$.
   (a) Montrer que pour i dans $\{1,\dots,p\}$ et k dans $\mathbb{N}^*$, $|\lambda_i|^k \le \left\|A^k\right\|$. [S]
   (b) En déduire que si A est diagonalisable alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$. [S]
4. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et b un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
   On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.
   On définit une suite $(x^{(n)})$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ par :
   $$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b$$
   (a) Montrer que l'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. [S]
   (b) Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M, N, $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$. [S]
   (c) Donner une condition suffisante pour que la suite $(x^{(n)})$ converge vers x. [S]

Partie II

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,p\}, a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in \{2,\dots,p\}, a_{i,i-1} = -1 \\ \forall i \in \{1,\dots,p-1\}, a_{i,i-1} = -1 \end{cases}$, les autres coefficients étant nuls.

1. I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.
   Trouver une relation entre D_p, D_{p-1}, D_{p-2} et λ (on pose $D_0 = 1$, et $D_1 = 2 - \lambda$). [S]
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire à priori de ses valeurs propres ? [S]
3. Soit λ une valeur propre de la matrice A. Montrer que $|\lambda - 2| \le 2$ en utilisant $\|A - 2I_p\|$. [S]
4. On pose $2 - \lambda = 2\cos\theta$, avec $0 \le \theta \le \pi$.
   Calculer D_p en fonction de p et θ. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. [S]
5. En déduire les valeurs propres de A. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie III

Dans la décomposition $A = M - N$ évoquée en **I-4**, A est la matrice de la partie **II** et on pose $M = 2I_p$. Ainsi $N = 2I_p - A$. On note $J = M^{-1}N = I_p - \frac{1}{2}A$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, expliciter $x^{(n+1)}$ en fonction de $x^{(n)}$ et de b. [S]
2. Trouver les valeurs propres de J et calculer $\rho(J)$. [S]
3. La suite $(x^{(n)})$ est-elle convergente ? [S]
4. Montrer que $1 - \rho(J) \leq \dfrac{\pi^2}{2p^2}$. [S]
5. Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas ? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

Partie I

1. On se donne ici deux entiers positifs p et q.
   Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.
   - $\|A\|\geq 0$. D'autre part $\|A\|=0\Rightarrow\forall i,\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}|=0\Rightarrow\forall(i,j),a_{ij}=0\Rightarrow A=0$.
   - Pour tout λ : $\|\lambda A\|=\max\limits_{1\leq i\leq p}\sum\limits_{j=1}^{q}|\lambda a_{ij}|=\max\limits_{1\leq i\leq p}\left(|\lambda|\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|\right)=|\lambda|\max\limits_{1\leq i\leq p}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|=|\lambda|\,\|A\|$.
   - L'inégalité $|a_{ij}+b_{ij}|\leq|a_{ij}|+|b_{ij}|$ donne : $\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}+b_{ij}|\leq\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|+\sum\limits_{j=1}^{q}|b_{ij}|$
     On en déduit $\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}+b_{ij}|\leq\|A\|+\|B\|$, puis $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$.
   - Conclusion : l'application $A\to\|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
   [Q]
2. On se donne les matrices $A=(a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{jk})$ dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
   La matrice $C=AB=(c_{ik})$ est élément de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.
   $c_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{q}a_{ij}b_{jk}\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{r}|c_{ik}|\leq\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|\,|b_{jk}|$, c'est-à-dire $\sum\limits_{k=1}^{r}|c_{ik}|\leq\sum\limits_{j=1}^{q}\left(|a_{ij}|\sum\limits_{k=1}^{r}|b_{jk}|\right)$
   On en déduit $\sum\limits_{k=1}^{r}|c_{ik}|\leq\sum\limits_{j=1}^{q}\left(|a_{ij}|\,\|B\|\right)$, c'est-à-dire $\sum\limits_{k=1}^{r}|c_{ik}|\leq\left(\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|\right)\|B\|$.
   Une nouvelle majoration donne $\sum\limits_{k=1}^{r}|c_{ik}|\leq\|A\|\,\|B\|$ et finalement $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$. [Q]
3. (a) Soit X_i un vecteur propre de A, pour la valeur propre λ_i.
   On a $AX_i=\lambda_iX_i$, et pour tout entier $k\geq1$, $A^kX_i=\lambda_i^kX_i$.
   On en déduit $\left\|A^kX_i\right\|=|\lambda_i|^k\,\|X_i\|$. Or $\left\|A^kX_i\right\|\leq\left\|A^k\right\|\|X_i\|$.
   Puisque le vecteur X_i est non nul, il en découle : $|\lambda_i|^k\leq\left\|A^k\right\|$. [Q]

   (b) – On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=0$.
   Il existe un indice i tel que $\rho(A)=|\lambda_i|$. Mais l'hypothèse sur A et la question précédente impliquent $\lim\limits_{k\to+\infty}|\lambda_i|^k=0$, c'est-à-dire $|\lambda_i|<1$, et donc $\rho(A)<1$.
   – Réciproquement, on suppose $\rho(A)<1$.
   Cela signifie que chaque valeur propre λ_i vérifie $|\lambda_i|<1$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_i^k=0$.
   On sait que la matrice A est diagonalisable : il existe donc une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A=PDP^{-1}$.
   Pour tout entier $k\geq1$, les seuls coefficients éventuellement non nuls de D^k sont ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire les λ_i^k.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Par hypothèse, et pour tout i, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0$. On en déduit $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = 0$.
D'autre part, $A^k = PD^kP^{-1}$ et on sait que $\left\|A^k\right\| = \left\|PD^kP^{-1}\right\| \leq \|P\| \left\|D^k\right\| \|P^{-1}\|$.
Ainsi $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = 0$ puis $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|D^k\right\| = 0$. Donc $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^k\right\| = 0$ et enfin $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$
[Q]

4. (a) $Ax = b \Leftrightarrow (M-N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ [Q]

   (b) Les égalités $\begin{cases} x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b \\ x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{cases}$ donnent $x^{(n+1)} - x = M^{-1}N(x^{(n)} - x)$.
   Une récurrence évidente donne alors, pour tout n : $x^{(n)} - x = (M^{-1}N)^n(x^{(0)} - x)$.
   [Q]

   (c) Pour que la suite $(x^{(n)})$ converge vers x, il suffit que la suite des puissances successives de la matrice diagonalisable $M^{-1}N$ converge vers la matrice nulle.
   On sait que cela est réalisé si $\rho(M^{-1}N) < 1$. [Q]

Partie II

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On développe D_p par rapport à sa première ligne :
$$D_p = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)D_{p-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
   Le dernier déterminant, qui est d'ordre $p-1$ est en fait égal à D_{p-2} (il suffit pour cela de le développer par rapport à sa première ligne.)
   On trouve donc $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$.
   D'autre part, $D_0 = 1$, $D_1 = 2-\lambda$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)D_1 - D_0$.
   L'égalité $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$ est donc valable pour tout $p \geq 2$. [Q]
2. La matrice A est symétrique à coefficients réels : elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$. [Q]
3. Notons d'abord que pour tout λ, $\|A - \lambda I_p\| \leq 2 + |2-\lambda|$. En particulier : $\|A - 2I_p\| \leq 2$.
   Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ.
$$\begin{aligned} \lambda u &= Au \Rightarrow (\lambda-2)u = (A-2I_p)u \Rightarrow |\lambda-2|\,\|u\| \\ &= \|(A-2I_p)u\| \leq \|A-2I_p\|\,\|u\| \leq 2\,\|u\| \end{aligned}$$
   Puisque $u \neq 0$, on en déduit effectivement l'inégalité $|\lambda-2| \leq 2$, c'est-à-dire $0 \leq \lambda \leq 4$.
   [Q]
4. Pour tout entier $p \geq 2$, on a l'égalité $D_p - 2\cos\theta D_{p-1} + D_{p-2} = 0$.
   L'équation caractéristique associée à cette récurrence est $\mathcal{C} : t^2 - 2\cos\theta t + 1 = 0$.
   Cette équation s'écrit $(t - \mathrm{e}^{i\theta})(t - \mathrm{e}^{-i\theta}) = 0$: ses racines sont donc $t_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $t_2 = \mathrm{e}^{-i\theta}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– Si $\theta = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 0$:
On a $t_1 = t_2 = 1$. Il existe deux scalaires α et β tels que pour tout p on ait $D_p = \alpha + p\beta$.
Puisque $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$, on trouve $\alpha = \beta = 1$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = 1 + p$.
– Si $\theta = \pi$, c'est-à-dire si $\lambda = 4$:
On a $t_1 = t_2 = -1$.
Il existe deux scalaires α, β tels que pour tout p : $D_p = (\alpha + p\beta)(-1)^p$.
Puisque $D_0 = 1$ et $D_1 = -2$, on trouve $\alpha = \beta = 1$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = (1 + p)(-1)^p$.
– Si $0 < \theta < \pi$, c'est-à-dire si $0 < \lambda < 4$:
Il existe deux scalaires α, β tels que pour tout p : $D_p = \alpha\cos(p\theta) + \beta\sin(p\theta)$.
On a $D_0 = \alpha = 1$ et $D_1 = \cos\theta + \beta\sin\theta = 2\cos\theta$, donc $\beta = \operatorname{cotan}\theta$.
On en déduit, pour tout entier p : $D_p = \cos(p\theta) + (\operatorname{cotan}\theta)\sin(p\theta) = \dfrac{\sin(p+1)\theta}{\sin\theta}$

[Q]

5. $\lambda = 2(1 - \cos\theta)$ est une valeur propre de A si et seulement si $D_p = 0$.
Compte tenu des résultats précédents, cela n'est possible que si $0 < \theta < \pi$ et pour une valeur de θ vérifiant $\sin(p+1)\theta = 0$.
Cela équivaut à $\theta = \dfrac{k\pi}{p+1}$ avec $1 \leq k \leq p$.
On peut donc conclure :
Les valeurs propres de A sont les $\lambda_k = 2(1 - \cos\theta_k) = 4\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}$,
(avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{p+1}$ et $1 \leq k \leq p$.)
On remarque que les p valeurs propres de A sont deux à deux distinctes. [Q]

Partie III

1. $\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = Jx^{(n)} + M^{-1}b = (I_p - \dfrac{1}{2}A)x^{(n)} + \dfrac{1}{2}b$ [Q]
2. Pour tout vecteur x, $Jx = \lambda x \Leftrightarrow (2I_p - A)x = 2\lambda x \Leftrightarrow Ax = 2(1 - \lambda)x$
λ est donc une valeur propre de J si et seulement si $2(1 - \lambda)$ est une valeur propre de A, c'est-à-dire si et seulement si $2(1 - \lambda) = 2(1 - \cos\theta_k)$.
Conclusion : Les valeurs propres de A sont les $\mu_k = \cos\theta_k$, avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{p+1}$ et $1 \leq k \leq p$.
Le minimum des $|\mu_k|$ est atteint pour $k = 1$ et $k = p$.
On en déduit : $\rho(J) = |\mu_1| = \cos\dfrac{\pi}{p+1}$. [Q]
3. La réponse est oui, car $\rho(J) < 1$. [Q]
4. On utilise l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.
On en déduit $1 - \rho(J) = 1 - \cos\dfrac{\pi}{p+1} = 2\sin^2\dfrac{\pi}{2(p+1)} \leq \dfrac{\pi^2}{2(p+1)^2} \leq \dfrac{\pi^2}{2p^2}$ [Q]
5. La vitesse de convergence de la suite $(x^{(n)})$ est comparable à celle d'une suite géométrique de raison $\rho(J)$. Pour de grandes valeurs de p, on voit que $\rho(J)$ est très proche de 1. La seule chose qu'on peut alors prévoir est que la méthode proposée n'est pas très efficace... [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021