# Familles d'intégrales à paramètres

L'objet de ce problème est d'étudier les fonctions $u$ et $v$, de la variable réelle $x$, définies par :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $(\alpha, \lambda)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout $t$ de $\mathbb{R}^{+*}$ on pose $f_{\alpha,\lambda}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{\alpha}$.

1. Pour quels couples $(\alpha, \lambda)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ l'application $f_{\alpha,\lambda}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ ? [S]
2. En déduire que les applications $u$ et $v$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Préciser leur parité. [S]
3. Montrer que les applications $u$ et $v$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. [S]
4. Dans cette question, on va montrer que $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application $x \mapsto I(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$. [S]
   (b) Pour tout $(x, h)$ de $\mathbb{R}^2$, montrer que $|u(x+h) - u(x) - hI(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{3/2}\,\mathrm{d}t$. [S]
   (c) En déduire que $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $u'(x) = I(x)$. [S]
   (d) Faire rapidement la même étude, mais pour la fonction $v$. [S]
5. Dans cette question, on veut montrer qu'en fait $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel $x$, on pose $z(x) = u(x) + iv(x)$.
   Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, montrer qu'on a l'égalité $z'(x) = \dfrac{-z(x)}{2(x+i)}$ puis conclure. [S]
6. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, montrer que $u(0) = \sqrt{\pi}$. [S]
7. Dans cette question, on trouve une expression de $u(x)$ et de $v(x)$.
   (a) Déterminer la primitive $\varphi$ qui s'annule en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{-1}{2(x+i)}$. [S]
   (b) Montrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $z(x) = \sqrt{\pi}\exp(\varphi(x))$. [S]
   (c) Dans cette question, $x$ est un réel positif ou nul.
   Exprimer $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$ et $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$ à l'aide de radicaux superposés.
   En déduire une expression de $u(x)$ et de $v(x)$. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

## Corrigé du problème

1. Notons que pour tout $(\alpha,\lambda)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$ l'application $f_{\alpha,\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   D'autre part $f_{\alpha,\lambda}\underset{0}{\sim}t^{\alpha}=\dfrac{1}{t^{-\alpha}}$.
   Ainsi $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $-\alpha<1$ (c'est-à-dire $\alpha>-1$).
   Ensuite $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2f_{\alpha,\lambda}(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\alpha+2}\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$ (car $\lambda>0$).
   On en déduit que $f_{\alpha,\lambda}$ est toujours intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Conclusion : $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha>-1$. [Q]

2. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, les app$^{\text{ns}}$ $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)$ et $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)$ sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\right|$ et $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\right|$ sont majorées par $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}=f_{-\frac12,1}(t)$.
   Or, d'après ce qui précède, on sait que l'application $f_{-\frac12,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)$ et $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)$ sont donc intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Autrement dit : les applications $u$ et $v$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
   Enfin, il est clair que $u$ est paire et que $v$ est impaire. [Q]

3. Pour tout $a,b$ de $\mathbb{R}$, on a $|\cos b-\cos a|\leqslant|b-a|$ (inégalité des accroissements finis).
   On en déduit, pour tout $x,y$ de $\mathbb{R}$ :
   $$|u(y)-u(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,|\cos(ty)-\cos(tx)|\,\mathrm{d}t\leqslant|y-x|\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   (ce calcul est justifié car l'application $f_{\frac12,1}:t\mapsto\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).
   On en déduit que l'application $u$ est $K$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, avec $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   On a le même résultat avec l'application $v$ (grâce à $|\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|$). [Q]

4. (a) Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, l'application $t\mapsto-\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+}$.
   Sur ce même intervalle elle est dominée par l'application intégrable $f_{\frac12,1}:t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}$.
   L'application $t\mapsto-\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^{+}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.
   Il en résulte que l'application $x\mapsto I(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. [Q]

   (b) Pour tout $(x,h)$ de $\mathbb{R}^2$ :
   $$u(x+h)-u(x)-hI(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(t(x+h))-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)+h\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\right)\mathrm{d}t.$$
   $$\text{Ainsi }|u(x+h)-u(x)-hI(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\Big|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)\Big|\,\mathrm{d}t.$$
   $$\text{Or, }\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ |\cos b-\cos a+(b-a)\sin a|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\ \text{(Taylor-Lagrange)}.$$


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ainsi $\Big|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)\Big| \leqslant \dfrac{t^2h^2}{2}$ et finalement :

Pour tout $(x,h)$ de $\mathbb{R}^2$, $|u(x+h)-u(x)-hI(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{3/2}\,\mathrm{d}t$.

(le calcul final est justifié par le fait que l'application $f_{3/2,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$). [Q]

(c) Le résultat précédent montre que $u(x+h)-u(x)-hI(x)=\mathrm{o}(h)$ quand $h\to 0$.
Cela signifie que l'application $u$ est dérivable en $x$ et que $u'(x)=I(x)$.
Ainsi, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $u'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\,\mathrm{d}t\Big)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$. [Q]

(d) On procède de la même manière que dans la question précédente.

Tout d'abord, on vérifie que $x\mapsto J(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite on prouve l'inégalité $|v(x+h)-v(x)-hJ(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{3/2}\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on utilise Taylor-Lagrange : $|\sin b-\sin a-(b-a)\cos a| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2}$.

Il en résulte : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ v'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t\Big)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$. [Q]

5. D'après (4), $x\mapsto z(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z'(x)=I(x)+iJ(x)$.
Autrement dit, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ :
$z'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}t+i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t=i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.
On procède alors à une intégration par parties sur un segment $[a,b]$, avec $0<a<b$ :
$i\displaystyle\int_a^b\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+i}\Big[\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\Big]_{t=a}^{t=b}-\frac{1}{2(x+i)}\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
Mais $\big|\mathrm{e}^{t(ix-1)}\big|=\mathrm{e}^{-t}$ donc $\lim\limits_{b\to+\infty}\mathrm{e}^{b(ix-1)}\sqrt{b}=0$. De même $\lim\limits_{a\to 0}\mathrm{e}^{a(ix-1)}\sqrt{a}=0$.
Ainsi, par double passage à la limite : $i\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2(x+i)}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
Cette égalité s'écrit, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $z'(x)=\dfrac{-z(x)}{2(x+i)}$.

Par récurrence sur $k$, montron que l'application $z$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.
Celà est vrai si $k=0$ (car $z$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$).

Si celà est vrai au rang $k$, alors l'égalité $z'(x)=\dfrac{-z(x)}{2(x+i)}$ montre que $z'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ donc que $z$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'application $z$ (donc les applications $u=\operatorname{Re} z$ et $v=\operatorname{Im} z$) sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. [Q]


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

6. On va utiliser le changement de variable $w = \sqrt{t}$ sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$.

On a $w = \sqrt{t}$ donc $\mathrm{d}w = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$ donc $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w$.

Et quand $\begin{cases} a \to 0 \\ b \to +\infty \end{cases}$ on obtient $u(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w = \sqrt{\pi}$. [Q]

7. (a) Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, on a $\dfrac{-1}{2(x+i)} = \dfrac{i-x}{2(x^2+1)} = -\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{i}{2(x^2+1)}$.

On en déduit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{-\,\mathrm{d}t}{2(t+i)} = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\,i\arctan x$. [Q]

(b) Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, posons $Z(x) = z(x)\exp(-\varphi(x))$.

L'application $Z$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$Z'(x) = (z'(x) - \varphi'(x)z(x))\exp(-\varphi(x)) = \left(z'(x) + \frac{z(x)}{2(x+i)}\right)\exp(-\varphi(x)) = 0.$$

Ainsi l'application $Z$ est constante sur $\mathbb{R}$. Or $Z(0) = z(0)\exp(-\varphi(0))$.

On sait que $u(0) = \sqrt{\pi}$ et $v(0) = 0$ donc $z(0) = \sqrt{\pi}$, et $\varphi(0) = 0$.

On en déduit : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ Z(x) = Z(0) = \sqrt{\pi}$.

Autrement dit, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $z(x) = \sqrt{\pi}\exp\varphi(x)$. [Q]

(c) Soit $x$ dans $\mathbb{R}^+$, et posons $\theta = \dfrac{1}{2}\arctan x$ (donc $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$).

On sait que $2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

Enfin $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

On sait que $z(x) = \sqrt{\pi} = \exp\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{-1/4}}\exp\left(\dfrac{1}{2}\,i\arctan x\right)$.

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$ :

$$u(x) = \operatorname{Re} z(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}}.$$

Cela se simplifie en : $u(x) = \sqrt{\dfrac{\pi(\sqrt{1+x^2}+1)}{2(1+x^2)}}$.

De même $v(x) = \operatorname{Im} z(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\arctan x\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

Finalement, pour tout $x \geqslant 0$ : $v(x) = \sqrt{\dfrac{\pi(\sqrt{1+x^2}-1)}{2(1+x^2)}}$. [Q]



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021