Commutant d'une matrice

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant* de A et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

Pour tous entiers r et s de $\{1, \dots, n\}$, on note E_{rs} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient situé en "ligne r, colonne s" vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.
Les n^2 matrices E_{rs}, dites *matrices élémentaires*, forment la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I : Propriétés générales des commutants

Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [S]
2. Montrer que si M est inversible et dans $\mathcal{C}(A)$, M^{-1} appartient à $\mathcal{C}(A)$. [S]
3. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer que la restriction à $\mathcal{C}(A)$ de l'application φ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$. [S]

Partie II : Commutants des matrices élémentaires

Dans cette partie, on étudie le commutant des matrices élémentaires et on en déduit que les matrices du type λI_n sont les seules à commuter avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou même avec seulement certains types de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit (r, s) un couple de $\{1, \dots, n\}^2$.
   Déterminer la forme générale des matrices de $\mathcal{C}(E_{rs})$.
   Donner la dimension de $\mathcal{C}(E_{rs})$. [S]
2. En déduire que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices *scalaires*, c'est-à-dire qui sont du type λI_n ($\lambda \in \mathbb{K}$.) [S]
3. Montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices *inversibles* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices scalaires.
   Indication : utiliser les matrices $I_n + E_{rs}$. [S]
4. Soit M une matrice commutant avec toutes les matrices *orthogonales* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut là encore montrer que M est une matrice scalaire.
   (a) Montrer que M commute avec les matrices E_{ii}.
   Indication : utiliser la matrice $F_{ii} = I_n - 2E_{ii}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

(b) Soient i et j deux indices distincts.
On pose $\Omega = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ et $\Omega' = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$
Montrer que Ω et Ω' sont deux matrices orthogonales. [S]

(c) Montrer que M commute avec E_{ij}. Conclure. [S]

Partie III : Commutants des matrices diagonalisables

Dans cette partie, on étudie les commutants des matrices diagonales ou diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On commence par considérer le cas où les valeurs propres sont distinctes, puis on passe au cas général.

1. Dans cette question, D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les coefficients diagonaux λ_i sont supposés distincts deux à deux.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales. [S]

   (b) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(D)$. [S]

   (c) Montrer que les matrices $I, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ forment une famille libre. [S]

   (d) Montrer que cette famille est une base de $\mathcal{C}(D)$. [S]

2. Dans cette question, A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que la famille $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ en forme une base. [S]

3. Dans cette question D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les coefficients diagonaux successifs sont notés $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On ne suppose plus que les λ_i sont distincts deux à deux, mais on suppose en revanche que les λ_i identiques sont groupés consécutivement.
   On note $m_1, m_2, \dots, m_r$ les multiplicités correspondant successivement aux différentes valeurs des λ_i, et $I_1, I_2, \dots, I_r$ les sous-intervalles de $\{1, 2, \dots, n\}$ correspondant respectivement à ces valeurs différentes.
   Voici un exemple pour illustrer ces notations :

   Si $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, alors $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 7 \\ \lambda_3 = 8 \\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} r = 3 \\ m_1 = 2 \\ m_2 = 1 \\ m_3 = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} I_1 = \{1, 2\} \\ I_2 = \{3\} \\ I_3 = \{4, 5, 6\} \end{cases}$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs, avec r blocs successifs de dimensions respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$. [S]

   Si on reprend l'exemple précédent cela signifie que $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices A qui s'écrivent :

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(D)$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4. Dans cette question, A est une matrice diagonalisable quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que les n valeurs propres de A définissent r valeurs distinctes, et on note $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités de ces différentes valeurs propres.
   (a) Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(A)$ est $\sum_{k=1}^{r} m_k^2$. [S]
   (b) Donner une méthode permettant de trouver une base de $\mathcal{C}(A)$. [S]

Partie IV : Commutants de certaines matrices nilpotentes

1. Soit T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le terme général t_{ij} est $t_{ij} = 1$ si $j = i+1$ et 0 sinon.
   (a) Calculer les puissances successives de T. [S]
   (b) Déterminer $\mathcal{C}(T)$. Montrer que $I_n, T, T^2, \ldots, T^{n-1}$ en forment une base. [S]
2. Dans cette question et la suivante N est une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique.
   (a) Soit m l'entier positif minimum tel que $N^{m-1} \neq 0$ et $N^m = 0$ (on l'appelle l'indice de nilpotence de N), c'est-à-dire tel que $f^{m-1} \neq 0$ et $f^m = 0$.
   Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $f^{m-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$.
   Montrer que la famille $f^{m-1}(x), \ldots, f^2(x), f(x), x$ est libre. [S]
   (b) Déduire de ce qui précède que $N^n = 0$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que la matrice nilpotente N vérifie $N^{n-1} \neq 0$.
   (a) Montrer que N est semblable à la matrice T de la question IV-1. [S]
   (b) En déduire que $\dim \mathcal{C}(N) = n$, et que $I_n, N, \ldots, N^{n-1}$ en constituent une base. [S]
4. Pour chacune des matrices nilpotentes N_k suivantes, donner la dimension de $\mathcal{C}(N_k)$:
$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ [S]
5. (a) Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP = J$, avec :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   [S]
   (b) En déduire que $\dim \mathcal{C}(M) = 6$. Donner une base de $\mathcal{C}(M)$. [S]
   (c) Les matrices I, M, M^2, M^3, M^4, M^5 forment-elles une base de $\mathcal{C}(M)$? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

Partie I : Propriétés générales des commutants

Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. L'application $M \mapsto AM - MA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Son noyau $\mathcal{C}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   D'autre part, il est clair que I_n appartient à $\mathcal{C}(A)$.
   Enfin, si M et N commutent avec A, il en est de même de MN car :
   $(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN)$.
   Cocnlusion : $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [Q]
2. $AM = MA$ implique $M^{-1}(AM)M^{-1} = M^{-1}(MA)M^{-1}$, donc $M^{-1}A = AM^{-1}$.
   Si M est inversible et dans $\mathcal{C}(A)$, son inverse M^{-1} est donc dans $\mathcal{C}(A)$.
   [Q]
3. On sait que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est un automorphisme "intérieur").
   L'automorphisme réciproque est d'ailleurs défini par $\varphi^{-1}(M) = PMP^{-1}$.
   Montrons qu'une matrice M est dans $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\varphi(M)$ est dans $\mathcal{C}(\varphi(A))$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}(AM)P = P^{-1}(MA)P \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) \\ &\Leftrightarrow \varphi(M) \in \mathcal{C}(\varphi(A)) \end{aligned}$$

   L'isomorphisme φ applique donc bien $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$. [Q]

Partie II : Commutants des matrices élémentaires

1. On se donne une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de coefficient général m_{ij}.
   Le terme d'indice (i,j) de E_{rs} est $\alpha_{ij} = \delta_{ir}\delta_{js}$.
   Le terme d'indice (i,j) de $A = ME_{rs}$ est :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\delta_{kr}\delta_{js} = \Big(\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\delta_{kr}\Big)\delta_{js} = m_{ir}\delta_{js}$$

   Le terme d'indice (i,j) de $B = E_{rs}M$ est :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{ks}m_{kj} = \delta_{ir}\Big(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ks}m_{kj}\Big) = \delta_{ir}m_{sj}$$

   Ainsi $M \in \mathcal{C}(E_{rs}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}, m_{ir}\delta_{js} = \delta_{ir}m_{sj}$.

   Tous les couples (i,j) appartiennent à l'un et l'un seulement des cas suivants :
   – $i = r$ et $j = s$: l'égalité (1) donne alors $m_{rr} = m_{ss}$.
   – $i \neq r$ et $j = s$: l'égalité (1) donne $m_{ir} = 0$.
   – $i = r$ et $j \neq s$: l'égalité (1) donne $m_{sj} = 0$.
   – $i \neq r$ et $j \neq s$: l'égalité (1) ne donne aucun renseignement.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On peut résumer en disant que M dans $\mathcal{C}(E_{rs})$ si et seulement si :
– Les coefficients de la ligne r sont nuls, sauf peut-être le coefficient diagonal.
– Les coefficients de la colonne s sont nuls, sauf peut-être le coefficient diagonal.
– Les deux coefficients diagonaux m_{rr} et m_{ss} sont égaux.
– Tous les autres coefficients de M sont quelconques.
Le nombre de coefficients arbitraires permettant de former l'une quelconque des matrices de $\mathcal{C}(E_{rs})$ est donc $(n-1)^2+1 = n^2-2n+2$.
On a ainsi obtenu ainsi la dimension de l'algèbre $\mathcal{C}(E_{rs})$. [Q]

2. Il est clair que λI_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Réciproquement, si M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elle commute avec la matrice E_{rs} pour tout couple (r,s).
En faisant varier r et s, on voit avec la question précédente que tous les coefficients non diagonaux de M sont nuls, et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux deux à deux.
La matrice M est donc une matrice scalaire. [Q]

3. Il est évident que λI_n commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Réciproquement on suppose que M commute avec les matrices inversibles.
Pour tout couple (i,j) la matrice $A_{rs} = I_n + E_{rs}$ est inversible (elle est diagonale si $i=j$, triangulaire si $i \neq j$, et dans tous les cas ses coefficients diagonaux sont non nuls.)
On en déduit que M commute avec A_{rs}, c'est-à-dire : $M(I_n+E_{rs}) = (I_n+E_{rs})M$.
Mais cette égalité devient $M + ME_{rs} = M + E_{rs}\,M$ c'est-à-dire : $ME_{rs} = E_{rs}\,M$.
Ainsi la matrice M commute avec toutes les matrices de E_{rs}, donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que cela implique que M est de la forme λI_n. [Q]

4. (a) Pour tout indice i, la matrice $F_{ii} = I_n - 2E_{ii}$ est une matrice orthogonale car elle est diagonale et ses coefficients diagonaux valent ± 1.
On a donc $M(I_n - 2E_{ii}) = (I_n - 2E_{ii})M$, c'est-à-dire $ME_{ii} = E_{ii}M$.
Autrement dit, la matrice M commute avec toutes les matrices E_{ii}. [Q]

(b) La matrice Ω est obtenue à partir de I_n en échangeant les lignes d'indices i et j. C'est une matrice orthogonale car ses vecteurs colonnes sont toujours unitaires et orthogonaux deux à deux (son déterminant vaut -1.)
La matrice Ω' est obtenue à partir de F_{ii} en échangeant les lignes d'indices i et j. C'est encore une matrice orthogonale, et son déterminant vaut 1. [Q]

(c) M commute avec $\Omega = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ et avec $\Omega' = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$ car ces matrices sont orthogonales.
Comme on sait que M commute avec I_n, E_{ii} et E_{jj}, on en déduit que M commute avec $E_{ij} + E_{ji}$ et avec $E_{ij} - E_{ji}$.
Elle commute donc avec leur demi-somme E_{ij}.
Ainsi M commute avec toutes les matrices E_{ij} (que i et j soient égaux ou distincts).
Elle commute donc avec leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Conclusion : M est une matrice scalaire. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie III : Commutants des matrices diagonalisables

1. (a) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux successifs de D.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.
Le terme d'indice (i,j) de D est $d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.
Le terme d'indice (i,j) de $M = DA$ est : $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} a_{kj} = \lambda_i a_{ij}$.
Le terme d'indice (i,j) de $N = AD$ est : $n_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \lambda_k \delta_{kj} = \lambda_j a_{ij}$.
Donc $AD = DA \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} = 0$.

Si les deux indices i et j sont égaux, cette égalité ne nous apprend rien. En revanche si les indices i et j sont distincts, elle signifie (en utilisant $\lambda_i \neq \lambda_j$) que les coefficients a_{ij} (c'est-à-dire les coefficients non diagonaux de A) sont nuls.
Autrement dit, A appartient à $\mathcal{C}(D)$ si et seulement si A est diagonale. [Q]

(b) L'ensemble des matrices diagonales est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les n matrices élémentaires $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$. Il est donc de dimension n. [Q]

(c) Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On suppose que $P(D) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k D^k$ est nulle, et on doit montrer que les α_k sont nuls.
La matrice $P(D)$ est en fait une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $P(\lambda_i)$.
Dire que $P(D)$ est nulle c'est donc dire que les n scalaires λ_i, distincts deux à deux, sont racines du polynôme P, qui est de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Cela implique bien sûr $P = 0$, ce qui prouve que $I, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ sont libres. [Q]

(d) Puisqu'on sait que $\dim \mathcal{C}(D) = n$, il suffit de vérifier que les n matrices indépendantes $I, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ sont éléments de $\mathcal{C}(D)$, ce qui est évident (toutes les puissances de D commutent avec D.)
Conclusion : La famille $I, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ est une base de $\mathcal{C}(D)$. [Q]

2. Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
Soit φ l'automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ (cf question I-3.)
L'automorphisme réciproque est défini par $\varphi^{-1}(M) = PMP^{-1}$.
On sait que φ réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$ c'est-à-dire sur $\mathcal{C}(D)$.
Or $\mathcal{C}(D)$ est un sous-espace de dimension n, dont une base est $I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1}$.
Ainsi $\dim \mathcal{C}(A) = n$ et une base de $\mathcal{C}(A)$ est $\varphi^{-1}(I), \varphi^{-1}(D), \dots, \varphi^{-1}(D^{n-1})$ (image réciproque d'une base par un isomorphisme.)
Or pout tout entier naturel k, $\varphi^{-1}(D^k) = PD^kP^{-1} = (PDP^{-1})^k = A^k$.
Conclusion : Les matrices $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ forment une base de $\mathcal{C}(A)$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3. (a) On reprend les notations et les calculs de la question III-1-a.
$AD = DA \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij} = 0.$

Si i et j appartiennent à un même sous-ensemble I_k (c'est-à-dire si les coefficients λ_i et λ_j sont égaux) cette égalité ne nous apprend rien.
Au contraire si i et j appartiennent à deux sous-ensembles I_k distincts, ces égalités signifient que les coefficients a_{ij} son nuls.
En conclusion, on a l'égalité $AD = DA$ si et seulement si tous les coefficients de A sont nuls, à l'exception peut-être des coefficients a_{ij} tels que les indices i, j appartiennent simultanément à l'un des sous-ensembles I_k (et de tels coefficients a_{ij} sont alors arbitraires).

Cela signifie exactement que A est une matrice diagonale par blocs de la forme ci-contre.
Il y a r blocs diagonaux $A_1, A_2, \dots, A_r$ de tailles respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix} \quad [\text{Q}]$$

(b) Avec les notations précédentes, le k-ème bloc diagonal A_k de la matrice A (élément générique de $\mathcal{C}(D)$) est une matrice quelconque de taille m_k : elle dépend donc de m_k^2 coefficients arbitraires.

La matrice A elle-même dépend donc de $\sum_{k=1}^{r} m_k^2$ coefficients arbitraires.

On en déduit que $\dim \mathcal{C}(D) = \sum_{k=1}^{r} m_k^2$. [Q]

4. (a) Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
On choisit la matrice de passage P pour que les valeurs propres identiques soient consécutives sur la diagonale de la matrice D, ce qui permet d'utiliser les résultats de la question III-3.
Soit φ l'automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ (cf question I-3.)
On sait que φ réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$ c'est-à-dire sur $\mathcal{C}(D)$.

Or $\mathcal{C}(D)$ est de dimension $\sum_{k=1}^{r} m_k^2$. Il en est donc de même de $\mathcal{C}(A)$. [Q]

(b) On reprend les notations précédentes, notamment la matrice de passage P (où les valeurs propres égales entre elles sont traitées consécutivement).
Les éléments de $\mathcal{C}(A)$ sont les images réciproques par φ de ceux de $\mathcal{C}(D)$.
Ce sont donc les matrices M de la forme ci-contre où les blocs diagonaux $A_1, \dots, A_r$ sont de dimensions respectives $m_1, \dots, m_r$.

$$M = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour trouver une base de $\mathcal{C}(A)$, il suffit de décomposer sur la base canonique tous les blocs diagonaux A_k.
En reprenant les notations de la question III-3, et notamment les sous-ensembles $I_1, I_2, \dots, I_r$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, une base de $\mathcal{C}(A)$ est donc constituée des matrices $M_{rs} = PE_{rs}P^{-1}$, pour tous les indices r, s qui appartiennent à un même I_k. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie IV : Commutants de certaines matrices nilpotentes

1. Soit T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le terme général t_{ij} est $t_{ij}=1$ si $j=i+1$ et 0 sinon.

   (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice T dans la base canonique $(e)=e_1,\dots,e_n$.
   Par définition, $f(e_1)=\overrightarrow{0}, f(e_2)=e_1, f(e_3)=e_2,\dots,f(e_n)=e_{n-1}$.
   On en déduit : $f^2(e_1)=f^2(e_2)=\overrightarrow{0}, f^2(e_3)=e_1, f^4(e_4)=e_2,\dots,f^2(e_n)=e_{n-2}$.
   Plus généralement, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$:
   $f^k(e_1)=\cdots=f^k(e_k)=\overrightarrow{0}$, et $f^k(e_{k+1})=e_1,\dots,f^k(e_n)=e_{n-k}$.
   En particulier, pour $k=n-1$: $f^{n-1}(e_1)=\cdots=f^{n-1}(e_{n-1})=\overrightarrow{0}$, et $f^{n-1}(e_n)=e_1$.
   Enfin pour $k=n$: $f^n(e_1)=\cdots=f^n(e_n)=\overrightarrow{0}$.
   Il est alors clair que pour $k\geq n$, les applications f^k sont nulles.

   Conclusion :
   - Pour $0\leq k<n$, le terme d'indice de T^k est $\begin{cases}1 & \text{si } j=i+k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
   - Pour $k\geq n$, la matrice T^k est nulle.

   Par exemple, si $n=4$,

   $$T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ T^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ T^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ T^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ [\mathrm{Q}]$$

   (b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.
   Le terme d'indice (i,j) de T est $t_{ij}=\delta_{i+1,j}$.
   Le terme d'indice (i,j) de $B=AT$ est :

   $$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}t_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{k+1,j}=\begin{cases}0 & \text{si } j=1\\ a_{i,j-1} & \text{si } j>1\end{cases}$$

   Le terme d'indice (i,j) de $C=TA$ est :

   $$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i+1,k}a_{kj}=\begin{cases}a_{i+1,j} & \text{si } i<n\\ 0 & \text{si } i=n\end{cases}$$

   Ecrire que AT et TA sont identiques, c'est écrire le conditions suivantes :
   - $\forall i\in\{1,\dots,n-1\},\forall j\in\{2,\dots,n-1\}, a_{i,j-1}=a_{i+1,j}$: Cela signifie l'égalité des coefficients le long de toute "parallèle" à la diagonale de A.
   - $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}, a_{i+1,1}=0$: Cela signifie que tous les coefficients de la première colonne de A, à l'exception peut-être de a_{11}, sont nuls.
   - $\forall j\in\{2,\dots,n\}, a_{n,j-1}=0$: Cela signifie que tous les coefficients de la dernière ligne de A, à l'exception peut-être de a_{nn}, sont nuls.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Toutes ces conditions signifient que la matrice A est de la forme suivante :

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1}\\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ddots & \alpha_{n-2}\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_0\end{pmatrix} \text{ ou encore } A=\alpha_0 I_n+\alpha_1 T+\cdots+\alpha_{n-1}T^{n-1}$$

L'ensemble $\mathcal{C}(T)$ est donc égal au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les n matrices $I_n, T, T^2, \dots, T^{n-1}$.
Celles-ci forment une famille libre car, en reprenant l'expression précédente de A, l'égalité $A=0$ implique immédiatement $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0$.
Ainsi les matrices $I_n, T, T^2, \dots, T^{n-1}$ constituent une base de $\mathcal{C}(T)$, qui est donc un sous-espace de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [Q]

2. (a) Supposons que $f^{m-1}(x), \dots, f^2(x), f(x), x$ soit liée.

Il existe donc $\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k f^k(x)=\overrightarrow{0}$.

Soit r l'indice k minimum tel que $\alpha\neq 0$.

L'égalité précédente devient alors : $\alpha_r f^r(x)+\sum_{k=r+1}^{m-1}\alpha_k f^k(x)=\overrightarrow{0}$.

Si on lui applique f^{m-r-1}, on trouve $\overrightarrow{0}=\alpha_r f^{m-1}(x)+\sum_{k\geq m}\alpha_k f^k(x)=\alpha_r f^{m-1}(x)$.

Or ce résultat est absurde car $\alpha_r\neq 0$ et $f^{m-1}(x)\neq\overrightarrow{0}$.
Conclusion : la famille $f^{m-1}(x), \dots, f^2(x), f(x), x$ est libre. [Q]

(b) La famille des m vecteurs $f^{m-1}(x), \dots, f^2(x), f(x), x$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.
On en déduit immédiatement que $m\leq n$. Or pour tout $k\geq m$ on sait que $N^k=0$.
Conclusion : $N^n=0$. [Q]

3. Dans cette question, on suppose que la matrice nilpotente N vérifie $N^{n-1}\neq 0$.

(a) On reprend les notations précédentes : soit x un vecteur tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$.
La famille $\varepsilon_1=f^{n-1}(x), \varepsilon_2=f^{n-2}(x), \dots, \varepsilon_{n-1}=f(x), \varepsilon_n=x$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Par construction, on a $f(\varepsilon_1)=\overrightarrow{0}, f(\varepsilon_2)=\varepsilon_1, \dots, f(\varepsilon_n)=\varepsilon_{n-1}$.
La matrice de f dans la base (ε) est donc la matrice T.
Conclusion : N et T représentent un même endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$. Elles sont donc semblables (si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (ε), alors on a l'égalité $T=P^{-1}NP$.) [Q]

(b) On reprend les notations de la question précédente, notamment $T=P^{-1}NP$.
On sait que l'application $M\to\varphi(M)=P^{-1}MP$ établit un isomorphisme de $\mathcal{C}(N)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(N))$, c'est-à-dire sur $\mathcal{C}(T)$. Ainsi on a $\dim\mathcal{C}(N)=\dim\mathcal{C}(T)=n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

D'autre part, les matrices T^k (avec $0 \leq k \leq n-1$) forment une base de $\mathcal{C}(T)$.
Leurs images réciproques par φ, c'est-à-dire les matrices $PT^kP^{-1} = N^k$ forment donc une base de $\mathcal{C}(N)$.
Conclusion : les matrices $I_n, N, N^2, \ldots, N^{n-1}$ forment une base de $\mathcal{C}(N)$. [Q]

4. On note A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$, de terme général a_{ij}.
   - Pour N_1 : il suffit de se reporter à la question IV-1, avec $n = 4$. Donc $\dim \mathcal{C}(N_1) = 4$.
   - Pour la matrice N_2 : $AN_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{41} & a_{42} & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

     Donc $AN_2 = N_2A$ si et seulement si A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

     Il reste 6 coefficients quelconques : $\dim \mathcal{C}(N_2) = 6$.
   - Pour la matrice N_3 : $AN_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \\ 0 & a_{41} & 0 & a_{43} \end{pmatrix}$ et $N_3A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

     Donc $AN_3 = N_3A$ si et seulement si A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

     Il reste 8 coefficients quelconques : $\dim \mathcal{C}(N_3) = 8$.
   - Pour la matrice N_4 : $AN_4 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_4A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

     Donc $AN_4 = N_4A$ si et seulement si A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

     Il reste 10 coefficients quelconques : $\dim \mathcal{C}(N_4) = 10$.

   [Q]

5. (a) Soit f le morphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice M dans la base canonique.

   Il faut montrer qu'il y a une base (u) de $\mathbb{R}^4$ telle que : (S) $\begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = u_1 + u_2 \\ f(u_3) = u_2 + u_3 \\ f(u_4) = u_4 \end{cases}$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\text{Or } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} (f-\mathrm{Id})(u_1)=0 \\ (f-\mathrm{Id})(u_2)=u_1 \\ (f-\mathrm{Id})(u_3)=u_2 \\ (f-\mathrm{Id})(u_4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (\Sigma) \begin{cases} u_2=(f-\mathrm{Id})(u_3) \\ u_1=(f-\mathrm{Id})^2(u_3) \\ (f-\mathrm{Id})^3(u_3)=0 \\ (f-\mathrm{Id})(u_4)=0 \end{cases}$$

La matrice de $f-\mathrm{Id}$ dans la base canonique est $M-I_4$.
On trouve successivement :

$$M-I_4=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}, (M-I_4)^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, (M-I_4)^3=0_4$$

On constate que la condition $(f-\mathrm{Id})^3(u_3)=0$ de (Σ) est automatiquement réalisée.
Il faut choisir un vecteur u_3 puis poser $u_2=(f-\mathrm{Id})(u_3)$ et $u_1=(f-\mathrm{Id})^2(u_3)$.
Ce choix n'est pas arbitraire car le vecteur u_1 doit au moins être non nul.
Pour assurer $u_1\neq 0$, on voit que $u_3=(1,0,0,0)$ convient, avec $\begin{cases} u_2=(-1,-1,2,4) \\ u_1=(2,-2,4,4) \end{cases}$
Il reste à choisir un vecteur $u_4=(x,y,z,t)$ qui soit dans le noyau de $f-\mathrm{Id}$ et qui ne soit pas dans le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1,u_2,u_3.
On constate que le vecteur $u_4=(1,0,1,0)$ semble convenir (il est en effet dans le noyau de $f-\mathrm{Id}$ car les colonnes C_1 et C_3 de $M-I_4$ sont opposées.)
Soit P la matrice de la famille u_1,u_2,u_3,u_4 dans la base canonique. On a :

$$P=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P=-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

Ainsi u_1,u_2,u_3,u_4 forment une base de $\mathbb{R}^4$ et par construction la matrice de f dans cette base est la matrice J donnée par l'énoncé. Autrement dit $P^{-1}MP=J$. [Q]

(b) Une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ commute avec J si et seulement si elle commute avec la matrice $J-I_4$, c'est-à-dire avec les matrice N_2 de la question IV-2.
On sait d'autre part que l'application $\varphi: B\to\varphi(B)=P^{-1}BP$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}(M)$ sur $\mathcal{C}(J)=\mathcal{C}(N_2)$.
Puisque $\dim\mathcal{C}(J)=6$, on en déduit $\dim\mathcal{C}(M)=6$.
On trouve $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
D'autre part, les matrices B de $\mathcal{C}(M)$ sont les images par φ^{-1} des matrices A de $\mathcal{C}(J)$, c'est-à-dire les matrices de la forme :

$$B=PAP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On obtient une base de $\mathcal{C}(A)$ en donnant la valeur 1 à l'une des six constantes arbitraires figurant dans A et la valeur 0 aux cinq autres.

On donnant la valeur 1 successivement à $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{43}, a_{44}$, on obtient les 6 matrices suivantes, qui forment une base du commutant de M :

$$B_1=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\-1&-3&1&-2\\2&6&-2&4\\4&8&-4&6\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}2&2&-2&2\\-2&-2&2&-2\\4&4&-4&4\\4&4&-4&4\end{pmatrix}$$

$$B_4=\begin{pmatrix}0&4&2&0\\0&-4&-2&0\\0&8&4&0\\0&8&4&0\end{pmatrix},\ B_5=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&0&0\\1&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ B_6=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

[Q]

(c) Si $I_4, M, \dots, M^5$ formaient une base de $\mathcal{C}(M)$ leurs images par l'isomorphisme φ c'est-à-dire les matrices $I_4, J, \dots, J^5$ formeraient une base de $\mathcal{C}(J)$.

Or les J^m s'écrivent $J^m=\begin{pmatrix}1&\lambda&\mu&0\\0&1&\lambda&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Les matrices qui sont polynômes en J s'écrivent donc : $\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma&0\\0&\alpha&\beta&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}$.

Dans ces conditions les matrices $I_4, J, \dots, J^5$ sont dans un même sous-espace de dimension 3 et sont donc liées. Il en est de même des matrices $I_4, M, \dots, M^5$.

La réponse à la question posée par l'énoncé est donc négative. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021