Commutant d'une matrice

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant* de A et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

Pour tous entiers r et s de $\{1, \ldots, n\}$, on note E_{rs} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient situé en "ligne r, colonne s" vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.
Les n^2 matrices E_{rs}, dites *matrices élémentaires*, forment la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I : Propriétés générales des commutants

Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [S]
2. Montrer que si M est inversible et dans $\mathcal{C}(A)$, M^{-1} appartient à $\mathcal{C}(A)$. [S]
3. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer que la restriction à $\mathcal{C}(A)$ de l'application φ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$. [S]

Partie II : Commutants des matrices élémentaires

Dans cette partie, on étudie le commutant des matrices élémentaires et on en déduit que les matrices du type λI_n sont les seules à commuter avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou même avec seulement certains types de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit (r, s) un couple de $\{1, \ldots, n\}^2$.
   Déterminer la forme générale des matrices de $\mathcal{C}(E_{rs})$.
   Donner la dimension de $\mathcal{C}(E_{rs})$. [S]
2. En déduire que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices *scalaires*, c'est-à-dire qui sont du type λI_n ($\lambda \in \mathbb{K}$.) [S]
3. Montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices *inversibles* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices scalaires.
   Indication : utiliser les matrices $I_n + E_{rs}$. [S]
4. Soit M une matrice commutant avec toutes les matrices *orthogonales* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut là encore montrer que M est une matrice scalaire.

   (a) Montrer que M commute avec les matrices E_{ii}.
   Indication : utiliser la matrice $F_{ii} = I_n - 2E_{ii}$. [S]

(b) Soient i et j deux indices distincts.
On pose $\Omega = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ et $\Omega' = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$
Montrer que Ω et Ω' sont deux matrices orthogonales. [S]

(c) Montrer que M commute avec E_{ij}. Conclure. [S]

Partie III : Commutants des matrices diagonalisables

Dans cette partie, on étudie les commutants des matrices diagonales ou diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On commence par considérer le cas où les valeurs propres sont distinctes, puis on passe au cas général.

1. Dans cette question, D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les coefficients diagonaux λ_i sont supposés distincts deux à deux.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales. [S]

   (b) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(D)$. [S]

   (c) Montrer que les matrices $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ forment une famille libre. [S]

   (d) Montrer que cette famille est une base de $\mathcal{C}(D)$. [S]

2. Dans cette question, A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que la famille $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ en forme une base. [S]

3. Dans cette question D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les coefficients diagonaux successifs sont notés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On ne suppose plus que les λ_i sont distincts deux à deux, mais on suppose en revanche que les λ_i identiques sont groupés consécutivement.
   On note $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités correspondant successivement aux différentes valeurs des λ_i, et $I_1, I_2, \ldots, I_r$ les sous-intervalles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ correspondant respectivement à ces valeurs différentes.
   Voici un exemple pour illustrer ces notations :

   $$\text{Si } D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \text{ alors } \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 7 \\ \lambda_3 = 8 \\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 9 \end{cases} \begin{cases} r = 3 \\ m_1 = 2 \\ m_2 = 1 \\ m_3 = 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} I_1 = \{1, 2\} \\ I_2 = \{3\} \\ I_3 = \{4, 5, 6\} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs, avec r blocs successifs de dimensions respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$. [S]

   Si on reprend l'exemple précédent cela signifie que $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices A qui s'écrivent :

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(D)$. [S]

4. Dans cette question, A est une matrice diagonalisable quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   On suppose que les n valeurs propres de A définissent r valeurs distinctes, et on note $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités de ces différentes valeurs propres.
   (a) Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(A)$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k^2$. [S]
   (b) Donner une méthode permettant de trouver une base de $\mathcal{C}(A)$. [S]

Partie IV : Commutants de certaines matrices nilpotentes

1. Soit T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le terme général t_{ij} est $t_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.
   (a) Calculer les puissances successives de T. [S]
   (b) Déterminer $\mathcal{C}(T)$. Montrer que $I_n, T, T^2, \ldots, T^{n-1}$ en forment une base. [S]
2. Dans cette question et la suivante N est une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique.
   (a) Soit m l'entier positif minimum tel que $N^{m-1} \neq 0$ et $N^m = 0$ (on l'appelle l'indice de nilpotence de N), c'est-à-dire tel que $f^{m-1} \neq 0$ et $f^m = 0$.
   Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $f^{m-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$.
   Montrer que la famille $f^{m-1}(x), \ldots, f^2(x), f(x), x$ est libre. [S]
   (b) Déduire de ce qui précède que $N^n = 0$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que la matrice nilpotente N vérifie $N^{n-1} \neq 0$.
   (a) Montrer que N est semblable à la matrice T de la question IV-1. [S]
   (b) En déduire que $\dim \mathcal{C}(N) = n$, et que $I_n, N, \ldots, N^{n-1}$ en constituent une base. [S]
4. Pour chacune des matrices nilpotentes N_k suivantes, donner la dimension de $\mathcal{C}(N_k)$:
   $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [S]
5. (a) Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP = J$, avec :
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   [S]
   (b) En déduire que $\dim \mathcal{C}(M) = 6$. Donner une base de $\mathcal{C}(M)$. [S]
   (c) Les matrices I, M, M^2, M^3, M^4, M^5 forment-elles une base de $\mathcal{C}(M)$? [S]

Corrigé du problème

Partie I : Propriétés générales des commutants

Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. L'application $M \mapsto AM - MA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Son noyau $\mathcal{C}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   D'autre part, il est clair que I_n appartient à $\mathcal{C}(A)$.
   Enfin, si M et N commutent avec A, il en est de même de MN car :
   $(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN)$.
   Cocnlusion : $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [Q]
2. $AM = MA$ implique $M^{-1}(AM)M^{-1} = M^{-1}(MA)M^{-1}$, donc $M^{-1}A = AM^{-1}$.
   Si M est inversible et dans $\mathcal{C}(A)$, son inverse M^{-1} est donc dans $\mathcal{C}(A)$.
   [Q]
3. On sait que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est un automorphisme "intérieur").
   L'automorphisme réciproque est d'ailleurs défini par $\varphi^{-1}(M) = PMP^{-1}$.
   Montrons qu'une matrice M est dans $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\varphi(M)$ est dans $\mathcal{C}(\varphi(A))$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}(AM)P = P^{-1}(MA)P \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) \\ &\Leftrightarrow \varphi(M) \in \mathcal{C}(\varphi(A)) \end{aligned}$$

   L'isomorphisme φ applique donc bien $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$. [Q]

Partie II : Commutants des matrices élémentaires

1. On se donne une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de coefficient général m_{ij}.
   Le terme d'indice (i,j) de E_{rs} est $\alpha_{ij} = \delta_{ir}\delta_{js}$.
   Le terme d'indice (i,j) de $A = ME_{rs}$ est :
   $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\delta_{kr}\delta_{js} = \Big(\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\delta_{kr}\Big)\delta_{js} = m_{ir}\delta_{js}$$
   Le terme d'indice (i,j) de $B = E_{rs}M$ est :
   $$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{ks}m_{kj} = \delta_{ir}\Big(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ks}m_{kj}\Big) = \delta_{ir}m_{sj}$$
   Ainsi $M \in \mathcal{C}(E_{rs}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}, m_{ir}\delta_{js} = \delta_{ir}m_{sj}$.

   Tous les couples (i,j) appartiennent à l'un et l'un seulement des cas suivants :
   – $i = r$ et $j = s$: l'égalité (1) donne alors $m_{rr} = m_{ss}$.
   – $i \neq r$ et $j = s$: l'égalité (1) donne $m_{ir} = 0$.
   – $i = r$ et $j \neq s$: l'égalité (1) donne $m_{sj} = 0$.
   – $i \neq r$ et $j \neq s$: l'égalité (1) ne donne aucun renseignement.

On peut résumer en disant que M dans $\mathcal{C}(E_{rs})$ si et seulement si :
- Les coefficients de la ligne r sont nuls, sauf peut-être le coefficient diagonal.
- Les coefficients de la colonne s sont nuls, sauf peut-être le coefficient diagonal.
- Les deux coefficients diagonaux m_{rr} et m_{ss} sont égaux.
- Tous les autres coefficients de M sont quelconques.

Le nombre de coefficients arbitraires permettant de former l'une quelconque des matrices de $\mathcal{C}(E_{rs})$ est donc $(n-1)^2+1 = n^2-2n+2$.

On a ainsi obtenu ainsi la dimension de l'algèbre $\mathcal{C}(E_{rs})$. [Q]

2. Il est clair que λI_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Réciproquement, si M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elle commute avec la matrice E_{rs} pour tout couple (r,s).

   En faisant varier r et s, on voit avec la question précédente que tous les coefficients non diagonaux de M sont nuls, et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux deux à deux. La matrice M est donc une matrice scalaire. [Q]

3. Il est évident que λI_n commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Réciproquement on suppose que M commute avec les matrices inversibles.

   Pour tout couple (i,j) la matrice $A_{rs} = I_n + E_{rs}$ est inversible (elle est diagonale si $i=j$, triangulaire si $i \neq j$, et dans tous les cas ses coefficients diagonaux sont non nuls.)

   On en déduit que M commute avec A_{rs}, c'est-à-dire : $M(I_n+E_{rs}) = (I_n+E_{rs})M$.

   Mais cette égalité devient $M + ME_{rs} = M + E_{rs}M$ c'est-à-dire : $ME_{rs} = E_{rs}M$.

   Ainsi la matrice M commute avec toutes les matrices de E_{rs}, donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que cela implique que M est de la forme λI_n. [Q]

4. (a) Pour tout indice i, la matrice $F_{ii} = I_n - 2E_{ii}$ est une matrice orthogonale car elle est diagonale et ses coefficients diagonaux valent ± 1.

   On a donc $M(I_n - 2E_{ii}) = (I_n - 2E_{ii})M$, c'est-à-dire $ME_{ii} = E_{ii}M$.

   Autrement dit, la matrice M commute avec toutes les matrices E_{ii}. [Q]

   (b) La matrice Ω est obtenue à partir de I_n en échangeant les lignes d'indices i et j. C'est une matrice orthogonale car ses vecteurs colonnes sont toujours unitaires et orthogonaux deux à deux (son déterminant vaut -1.)

   La matrice Ω' est obtenue à partir de F_{ii} en échangeant les lignes d'indices i et j. C'est encore une matrice orthogonale, et son déterminant vaut 1. [Q]

   (c) M commute avec $\Omega = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ et avec $\Omega' = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$ car ces matrices sont orthogonales.

   Comme on sait que M commute avec I_n, E_{ii} et E_{jj}, on en déduit que M commute avec $E_{ij} + E_{ji}$ et avec $E_{ij} - E_{ji}$.

   Elle commute donc avec leur demi-somme E_{ij}.

   Ainsi M commute avec toutes les matrices E_{ij} (que i et j soient égaux ou distincts).

   Elle commute donc avec leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Conclusion : M est une matrice scalaire. [Q]

Partie III : Commutants des matrices diagonalisables

1. (a) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux successifs de D.
   Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.
   Le terme d'indice (i, j) de D est $d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.
   Le terme d'indice (i, j) de $M = DA$ est : $m_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} a_{kj} = \lambda_i a_{ij}$.
   Le terme d'indice (i, j) de $N = AD$ est : $n_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \lambda_k \delta_{kj} = \lambda_j a_{ij}$.
   Donc $AD = DA \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} = 0$.

   Si les deux indices i et j sont égaux, cette égalité ne nous apprend rien. En revanche si les indices i et j sont distincts, elle signifie (en utilisant $\lambda_i \neq \lambda_j$) que les coefficients a_{ij} (c'est-à-dire les coefficients non diagonaux de A) sont nuls.
   Autrement dit, A appartient à $\mathcal{C}(D)$ si et seulement si A est diagonale. [Q]

   (b) L'ensemble des matrices diagonales est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les n matrices élémentaires $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$. Il est donc de dimension n. [Q]

   (c) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
   On suppose que $P(D) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k D^k$ est nulle, et on doit montrer que les α_k sont nuls.
   La matrice $P(D)$ est en fait une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $P(\lambda_i)$.
   Dire que $P(D)$ est nulle c'est donc dire que les n scalaires λ_i, distincts deux à deux, sont racines du polynôme P, qui est de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
   Cela implique bien sûr $P = 0$, ce qui prouve que $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ sont libres. [Q]

   (d) Puisqu'on sait que $\dim \mathcal{C}(D) = n$, il suffit de vérifier que les n matrices indépendantes $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ sont éléments de $\mathcal{C}(D)$, ce qui est évident (toutes les puissances de D commutent avec D.)
   Conclusion : La famille $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ est une base de $\mathcal{C}(D)$. [Q]

2. Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   Soit φ l'automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ (cf question I-3.)
   L'automorphisme réciproque est défini par $\varphi^{-1}(M) = PMP^{-1}$.
   On sait que φ réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$ c'est-à-dire sur $\mathcal{C}(D)$.
   Or $\mathcal{C}(D)$ est un sous-espace de dimension n, dont une base est $I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$.
   Ainsi $\dim \mathcal{C}(A) = n$ et une base de $\mathcal{C}(A)$ est $\varphi^{-1}(I), \varphi^{-1}(D), \ldots, \varphi^{-1}(D^{n-1})$ (image réciproque d'une base par un isomorphisme.)
   Or pout tout entier naturel k, $\varphi^{-1}(D^k) = PD^kP^{-1} = (PDP^{-1})^k = A^k$.
   Conclusion : Les matrices $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ forment une base de $\mathcal{C}(A)$. [Q]

3. (a) On reprend les notations et les calculs de la question III-1-a.
$AD = DA \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij} = 0.$

Si i et j appartiennent à un même sous-ensemble I_k (c'est-à-dire si les coefficients λ_i et λ_j sont égaux) cette égalité ne nous apprend rien.
Au contraire si i et j appartiennent à deux sous-ensembles I_k distincts, ces égalités signifient que les coefficients a_{ij} son nuls.
En conclusion, on a l'égalité $AD = DA$ si et seulement si tous les coefficients de A sont nuls, à l'exception peut-être des coefficients a_{ij} tels que les indices i, j appartiennent simultanément à l'un des sous-ensembles I_k (et de tels coefficients a_{ij} sont alors arbitraires).

Cela signifie exactement que A est une matrice diagonale par blocs de la forme ci-contre.
Il y a r blocs diagonaux $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de tailles respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$ [Q]

(b) Avec les notations précédentes, le k-ème bloc diagonal A_k de la matrice A (élément générique de $\mathcal{C}(D)$) est une matrice quelconque de taille m_k : elle dépend donc de m_k^2 coefficients arbitraires.
La matrice A elle-même dépend donc de $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k^2$ coefficients arbitraires.
On en déduit que $\dim \mathcal{C}(D) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k^2$. [Q]

4. (a) Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
On choisit la matrice de passage P pour que les valeurs propres identiques soient consécutives sur la diagonale de la matrice D, ce qui permet d'utiliser les résultats de la question III-3.
Soit φ l'automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ (cf question I-3.)
On sait que φ réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(A))$ c'est-à-dire sur $\mathcal{C}(D)$.
Or $\mathcal{C}(D)$ est de dimension $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k^2$. Il en est donc de même de $\mathcal{C}(A)$. [Q]

(b) On reprend les notations précédentes, notamment la matrice de passage P (où les valeurs propres égales entre elles sont traitées consécutivement).
Les éléments de $\mathcal{C}(A)$ sont les images réciproques par φ de ceux de $\mathcal{C}(D)$.
Ce sont donc les matrices M de la forme ci-contre où les blocs diagonaux $A_1, \ldots, A_r$ sont de dimensions respectives $m_1, \ldots, m_r$.

$$M = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A_r \end{pmatrix}P^{-1}$$

Pour trouver une base de $\mathcal{C}(A)$, il suffit de décomposer sur la base canonique tous les blocs diagonaux A_k.
En reprenant les notations de la question III-3, et notamment les sous-ensembles $I_1, I_2, \ldots, I_r$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, une base de $\mathcal{C}(A)$ est donc constituée des matrices $M_{rs} = PE_{rs}P^{-1}$, pour tous les indices r, s qui appartiennent à un même I_k. [Q]

Partie IV : Commutants de certaines matrices nilpotentes

1. Soit T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le terme général t_{ij} est $t_{ij} = 1$ si $j = i+1$ et 0 sinon.

   (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice T dans la base canonique $(e) = e_1, \ldots, e_n$.
   Par définition, $f(e_1) = \overrightarrow{0}, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, \ldots, f(e_n) = e_{n-1}$.
   On en déduit : $f^2(e_1) = f^2(e_2) = \overrightarrow{0}, f^2(e_3) = e_1, f^4(e_4) = e_2, \ldots, f^2(e_n) = e_{n-2}$.
   Plus généralement, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$:
   $f^k(e_1) = \cdots = f^k(e_k) = \overrightarrow{0}$, et $f^k(e_{k+1}) = e_1, \ldots, f^k(e_n) = e_{n-k}$.
   En particulier, pour $k = n-1$: $f^{n-1}(e_1) = \cdots = f^{n-1}(e_{n-1}) = \overrightarrow{0}$, et $f^{n-1}(e_n) = e_1$.
   Enfin pour $k = n$: $f^n(e_1) = \cdots = f^n(e_n) = \overrightarrow{0}$.
   Il est alors clair que pour $k \geq n$, les applications f^k sont nulles.

   Conclusion :

   – Pour $0 \leq k < n$, le terme d'indice de T^k est $\begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   – Pour $k \geq n$, la matrice T^k est nulle.

   Par exemple, si $n = 4$,

   $$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ [Q]

   (b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.
   Le terme d'indice (i,j) de T est $t_{ij} = \delta_{i+1,j}$.
   Le terme d'indice (i,j) de $B = AT$ est :

   $$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{k+1,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ a_{i,j-1} & \text{si } j > 1 \end{cases}$$

   Le terme d'indice (i,j) de $C = TA$ est :

   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i+1,k} a_{kj} = \begin{cases} a_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

   Ecrire que AT et TA sont identiques, c'est écrire le conditions suivantes :

   – $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \forall j \in \{2, \ldots, n-1\}, a_{i,j-1} = a_{i+1,j}$: Cela signifie l'égalité des coefficients le long de toute "parallèle" à la diagonale de A.

   – $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, a_{i+1,1} = 0$: Cela signifie que tous les coefficients de la première colonne de A, à l'exception peut-être de a_{11}, sont nuls.

   – $\forall j \in \{2, \ldots, n\}, a_{n,j-1} = 0$: Cela signifie que tous les coefficients de la dernière ligne de A, à l'exception peut-être de a_{nn}, sont nuls.

Toutes ces conditions signifient que la matrice A est de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ddots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_{n-1} T^{n-1}$$

L'ensemble $\mathcal{C}(T)$ est donc égal au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les n matrices $I_n, T, T^2, \dots, T^{n-1}$.
Celles-ci forment une famille libre car, en reprenant l'expression précédente de A, l'égalité $A = 0$ implique immédiatement $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$.
Ainsi les matrices $I_n, T, T^2, \dots, T^{n-1}$ constituent une base de $\mathcal{C}(T)$, qui est donc un sous-espace de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [Q]

2. (a) Supposons que $f^{m-1}(x), \dots, f^2(x), f(x), x$ soit liée.

   Il existe donc $\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k f^k(x) = \overrightarrow{0}$.

   Soit r l'indice k minimum tel que $\alpha \neq 0$.

   L'égalité précédente devient alors : $\alpha_r f^r(x) + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{m-1} \alpha_k f^k(x) = \overrightarrow{0}$.

   Si on lui applique f^{m-r-1}, on trouve $\overrightarrow{0} = \alpha_r f^{m-1}(x) + \displaystyle\sum_{k \geq m} \alpha_k f^k(x) = \alpha_r f^{m-1}(x)$.

   Or ce résultat est absurde car $\alpha_r \neq 0$ et $f^{m-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$.
   Conclusion : la famille $f^{m-1}(x), \dots, f^2(x), f(x), x$ est libre. [Q]

   (b) La famille des m vecteurs $f^{m-1}(x), \dots, f^2(x), f(x), x$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.
   On en déduit immédiatement que $m \leq n$. Or pour tout $k \geq m$ on sait que $N^k = 0$.
   Conclusion : $N^n = 0$. [Q]

3. Dans cette question, on suppose que la matrice nilpotente N vérifie $N^{n-1} \neq 0$.

   (a) On reprend les notations précédentes : soit x un vecteur tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
   La famille $\varepsilon_1 = f^{n-1}(x), \varepsilon_2 = f^{n-2}(x), \dots, \varepsilon_{n-1} = f(x), \varepsilon_n = x$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^n$.
   Par construction, on a $f(\varepsilon_1) = \overrightarrow{0}, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1, \dots, f(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n-1}$.
   La matrice de f dans la base (ε) est donc la matrice T.
   Conclusion : N et T représentent un même endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$. Elles sont donc semblables (si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (ε), alors on a l'égalité $T = P^{-1}NP$.) [Q]

   (b) On reprend les notations de la question précédente, notamment $T = P^{-1}NP$.
   On sait que l'application $M \to \varphi(M) = P^{-1}MP$ établit un isomorphisme de $\mathcal{C}(N)$ sur $\mathcal{C}(\varphi(N))$, c'est-à-dire sur $\mathcal{C}(T)$. Ainsi on a $\dim \mathcal{C}(N) = \dim \mathcal{C}(T) = n$.

D'autre part, les matrices T^k (avec $0 \leq k \leq n-1$) forment une base de $\mathcal{C}(T)$.
Leurs images réciproques par φ, c'est-à-dire les matrices $PT^kP^{-1} = N^k$ forment donc une base de $\mathcal{C}(N)$.
Conclusion : les matrices $I_n, N, N^2, \ldots, N^{n-1}$ forment une base de $\mathcal{C}(N)$. [Q]

4. On note A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$, de terme général a_{ij}.
   - Pour N_1 : il suffit de se reporter à la question IV-1, avec $n=4$. Donc $\dim \mathcal{C}(N_1) = 4$.
   - Pour la matrice N_2 : $AN_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{41} & a_{42} & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

     Donc $AN_2 = N_2A$ si et seulement si A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

     Il reste 6 coefficients quelconques : $\dim \mathcal{C}(N_2) = 6$.
   - Pour la matrice N_3 : $AN_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \\ 0 & a_{41} & 0 & a_{43} \end{pmatrix}$ et $N_3A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

     Donc $AN_3 = N_3A$ si et seulement si A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

     Il reste 8 coefficients quelconques : $\dim \mathcal{C}(N_3) = 8$.
   - Pour la matrice N_4 : $AN_4 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_4A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

     Donc $AN_4 = N_4A$ si et seulement si A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

     Il reste 10 coefficients quelconques : $\dim \mathcal{C}(N_4) = 10$.

   [Q]

5. (a) Soit f le morphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice M dans la base canonique.

   Il faut montrer qu'il y a une base (u) de $\mathbb{R}^4$ telle que : $(S)\ \begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = u_1 + u_2 \\ f(u_3) = u_2 + u_3 \\ f(u_4) = u_4 \end{cases}$

Or $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (f-\mathrm{Id})(u_1)=0 \\ (f-\mathrm{Id})(u_2)=u_1 \\ (f-\mathrm{Id})(u_3)=u_2 \\ (f-\mathrm{Id})(u_4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow\ (\Sigma)\ \begin{cases} u_2=(f-\mathrm{Id})(u_3) \\ u_1=(f-\mathrm{Id})^2(u_3) \\ (f-\mathrm{Id})^3(u_3)=0 \\ (f-\mathrm{Id})(u_4)=0 \end{cases}$

La matrice de $f-\mathrm{Id}$ dans la base canonique est $M-I_4$.
On trouve successivement :

$$M-I_4=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}, (M-I_4)^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, (M-I_4)^3=0_4$$

On constate que la condition $(f-\mathrm{Id})^3(u_3)=0$ de (Σ) est automatiquement réalisée.
Il faut choisir un vecteur u_3 puis poser $u_2=(f-\mathrm{Id})(u_3)$ et $u_1=(f-\mathrm{Id})^2(u_3)$.
Ce choix n'est pas arbitraire car le vecteur u_1 doit au moins être non nul.
Pour assurer $u_1\neq 0$, on voit que $u_3=(1,0,0,0)$ convient, avec $\begin{cases} u_2=(-1,-1,2,4) \\ u_1=(2,-2,4,4) \end{cases}$
Il reste à choisir un vecteur $u_4=(x,y,z,t)$ qui soit dans le noyau de $f-\mathrm{Id}$ et qui ne soit pas dans le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1,u_2,u_3.
On constate que le vecteur $u_4=(1,0,1,0)$ semble convenir (il est en effet dans le noyau de $f-\mathrm{Id}$ car les colonnes C_1 et C_3 de $M-I_4$ sont opposées.)
Soit P la matrice de la famille u_1,u_2,u_3,u_4 dans la base canonique. On a :

$$P=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P=-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

Ainsi u_1,u_2,u_3,u_4 forment une base de $\mathbb{R}^4$ et par construction la matrice de f dans cette base est la matrice J donnée par l'énoncé. Autrement dit $P^{-1}MP=J$. [Q]

(b) Une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ commute avec J si et seulement si elle commute avec la matrice $J-I_4$, c'est-à-dire avec les matrice N_2 de la question IV-2.
On sait d'autre part que l'application $\varphi : B\to\varphi(B)=P^{-1}BP$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}(M)$ sur $\mathcal{C}(J)=\mathcal{C}(N_2)$.
Puisque $\dim\mathcal{C}(J)=6$, on en déduit $\dim\mathcal{C}(M)=6$.
On trouve $P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
D'autre part, les matrices B de $\mathcal{C}(M)$ sont les images par φ^{-1} des matrices A de $\mathcal{C}(J)$, c'est-à-dire les matrices de la forme :

$$B=PAP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient une base de $\mathcal{C}(A)$ en donnant la valeur 1 à l'une des six constantes arbitraires figurant dans A et la valeur 0 aux cinq autres.

On donnant la valeur 1 successivement à $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{43}, a_{44}$, on obtient les 6 matrices suivantes, qui forment une base du commutant de M :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Q]

(c) Si $I_4, M, \ldots, M^5$ formaient une base de $\mathcal{C}(M)$ leurs images par l'isomorphisme φ c'est-à-dire les matrices $I_4, J, \ldots, J^5$ formeraient une base de $\mathcal{C}(J)$.

Or les J^m s'écrivent $J^m = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices qui sont polynômes en J s'écrivent donc : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions les matrices $I_4, J, \ldots, J^5$ sont dans un même sous-espace de dimension 3 et sont donc liées. Il en est de même des matrices $I_4, M, \ldots, M^5$.

La réponse à la question posée par l'énoncé est donc négative. [Q]