Matrices et déterminants de Gram

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ le produit scalaire, et $u \mapsto \|u\|$ la norme associée. Soit $(u) = u_1, \ldots, u_m$ une famille de m vecteurs de E.

On appelle *matrice de Gram* de (u) la matrice $G = G(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, carrée et symétrique d'ordre m, dont le terme général est $g_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. On note $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ le déterminant de cette matrice G. On l'appelle le *déterminant de Gram* des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

1. Montrer que si (u) est liée, alors $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0$. [S]
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant la famille (u). Soient (ε) une base orthonormée de F et M la matrice de la famille (u) dans cette base.
   (a) Montrer que la matrice G peut s'écrire $G = {}^{\mathrm{T}}MM$. [S]
   (b) Montrer que G, M ont même “noyau”, puis que G a même rang que la famille (u). [S]
3. (a) Montrer que les valeurs propres de G sont positives ou nulles
   (indication : pour toute matrice-colonne X, considérer le produit ${}^{\mathrm{T}}XGX$.) [S]
   (b) Montrer que chaque valeur propre de G est majorée par $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \|u_j\|^2$. [S]
4. On suppose que la famille (u) est libre. Soit F le sous-espace de E engendré par $u_1, \ldots, u_m$.
   (a) Montrer que $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m) > 0$. [S]
   (b) Montrer que la distance d de x au sous-espace F vérifie $d^2 = \dfrac{\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m, x)}{\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$ [S]
   (c) Soient x un vecteur de E, et $p(x)$ sa projection orthogonale sur F.
   Montrer que $p(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, u_j$, avec $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_m, x \rangle \end{pmatrix}$ [S]
5. On suppose que (u) est une base de E. Pour tout x de E, les produits scalaires $\langle u_i, x \rangle$ sont appelées les *coordonnées covariantes* de x dans la base (u). Les composantes de x (au sens habituel) de x dans (u) sont appelées ses *coordonnées contravariantes*.
   Montrer comment x est déterminé de manière unique par ses coordonnées covariantes, en fonction desquelles on exprimera les composantes de x dans la base (u). [S]
6. Dans cette question, H est une matrice carrée symétrique d'ordre n, dont les valeurs propres sont toutes supposées positives ou nulles. Montrer qu'il existe au moins une famille $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont H est la matrice de Gram. (indication : diagonaliser H dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.) [S]

Corrigé du problème

1. Par hypothèse il existe m scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j = \overrightarrow{0}$.

   Pour tout i de $\{1, \ldots, m\}$, on a alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j < u_i, u_j >= 0$.

   Autrement dit les vecteurs-colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de G vérifient $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_j = \overrightarrow{0}$.

   Ainsi G n'est pas inversible. Donc $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0$. [Q]

2. (a) On suppose que F est de dimension r, avec $1 \leq r \leq n$. La matrice M est donc de type $r \times m$, et ${}^{\mathrm{T}}MM$ est de type $m \times m$ (donc de même "format" que G).
   Notons m_{ij} le terme d'indice (i, j) de M et n_{ij} celui de ${}^{\mathrm{T}}M$ (donc $n_{ij} = m_{ji}$).

   Pour tout j de $\{1, \ldots, m\}$, on a donc $u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_{ij}\, \varepsilon_i$.

   Alors, pour tous indices i, j de $\{1, \ldots, m\}$, on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée et écrire :

   $$< u_i, u_j >= \sum_{k=1}^{m} m_{ki}\, m_{kj} = \sum_{k=1}^{m} n_{ik}\, m_{kj}$$

   On reconnait finalement le terme d'indice (i, j) du produit ${}^{\mathrm{T}}MM$.
   Conclusion : on a l'égalité matricielle $G = {}^{\mathrm{T}}MM$. [Q]

   (b) Soit X une matrice colonne de hauteur m.
   Il faut montrer $MX = 0 \Leftrightarrow {}^{\mathrm{T}}MMX = 0$.
   L'implication $MX = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}MMX = 0$ est évidente.
   Réciproquement, ${}^{\mathrm{T}}MMX = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}X\,{}^{\mathrm{T}}MMX = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}(MX)MX = 0$.
   Mais ${}^{\mathrm{T}}(MX)MX$ représente le carré de la norme de MX (dans $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique). L'égalité ${}^{\mathrm{T}}(MX)MX = 0$ implique donc $MX = 0$.
   Ainsi les matrices M et G ont le même noyau.
   Puisque elles ont toutes deux m colonnes (elles représentent des morphismes définis sur $\mathbb{R}^m$) on peut écrire, en vertu du théorème du rang :

   $$\operatorname{rg} M = m - \dim\ker M = m - \dim\ker G = \operatorname{rg} G$$

   Les matrices M, G ont donc même rang, et le rang de M est celui de la famille (u). [Q]

3. (a) Soit X un vecteur propre propre de G pour la valeur propre λ (qui est nécessairement réelle car G est une matrice symétrique à coefficients réels).
   On a $\lambda X = GX$ et donc $\lambda\|X\|^2 = \lambda\,{}^{\mathrm{T}}XX = {}^{\mathrm{T}}X\,{}^{\mathrm{T}}MMX = {}^{\mathrm{T}}(MX)MX = \|MX\|^2$.
   Puisque $\|X\| > 0$, ce résultat prouve que λ est positif ou nul. [Q]

(b) La quantité $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \|u_j\|^2$ représente la trace de la matrice G.

Or le polynôme caractéristique de G est scindé (G est diagonalisable) et la somme des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de G (chacune comptée autant de fois que sa multiplicité) est égale à $\operatorname{tr} G$.

Du fait que les λ_k sont positives ou nulles, on tire alors $\lambda_k \leq \operatorname{tr} G$. [Q]

4. (a) Les vecteurs $u_1, \ldots, u_m$ forment une base de F, qui est donc de dimension m.

Dans ces conditions la matrice M (avec les notations de (2)) est carrée d'ordre m et inversible car elle est la matrice de passage entre les bases (ε) et (u) de F.

L'égalité $G = {}^{\mathrm{T}}MM$ donne alors $\det G = (\det M)^2$, et donc $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_m) > 0$. [Q]

(b) Soit $p(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

On a l'égalité $x = (x - p(x)) + p(x)$, avec $x - p(x) \in F^\perp$, $p(x) \in F$, et $d = \|x - p(x)\|$.

Pour chaque u_i, on a $< u_i, x > = < u_i, x - p(x) > + < u_i, p(x) > = < u_i, p(x) >$.

Les matrices de Gram $G_1 = G(u_1, \ldots, u_m, x)$ et $G_2 = G(u_1, \ldots, u_m, p(x))$ sont donc identiques, sauf pour leur coefficient d'indice $(m+1, m+1)$, qui vaut $\|x\|^2$ dans G_1 et $\|p(x)\|^2$ dans G_2.

Dans le déterminant $\Delta(u_1, \ldots, u_m, x)$, on remplace les produits scalaires $< u_i, x >$ par $< u_i, p(x) >$, et la quantité $\|x\|^2$ par $\|p(x)\|^2 + d^2$.

On utilise ensuite la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne.

$$\begin{aligned}
\Delta(u_1, \ldots, u_m, x) &= \begin{vmatrix} < u_1, u_1 > & \ldots & < u_1, u_m > & < u_1, x > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < u_m, u_1 > & \ldots & < u_m, u_m > & < u_m, x > \\ < x, u_1 > & \ldots & < x, u_m > & \|x\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} < u_1, u_1 > & \ldots & < u_1, u_m > & < u_1, p(x) > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < u_m, u_1 > & \ldots & < u_m, u_m > & < u_m, p(x) > \\ < p(x), u_1 > & \ldots & < p(x), u_m > & \|p(x)\|^2 + d^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} < u_1, u_1 > & \ldots & < u_1, u_m > & < u_1, p(x) > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < u_m, u_1 > & \ldots & < u_m, u_m > & < u_m, p(x) > \\ < p(x), u_1 > & \ldots & < p(x), u_m > & \|p(x)\|^2 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} < u_1, u_1 > & \ldots & < u_1, u_m > & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < u_m, u_1 > & \ldots & < u_m, u_m > & 0 \\ < p(x), u_1 > & \ldots & < p(x), u_m > & d^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, on reconnait tout d'abord le déterminant de Gram des vecteurs $u_1,\ldots,u_m,p(x)$. Ce déterminant est nul car ces vecteurs sont liés.

Enfin le tout dernier déterminant peut être développé par rapport à sa dernière colonne, et ce développement s'écrit $d^2\Delta(u_1,\ldots,u_m)$.

Conclusion : on a bien l'égalité $d^2 = \dfrac{\Delta(u_1,u_2,\ldots,u_m,x)}{\Delta(u_1,u_2,\ldots,u_m)}$. [Q]

(c) On écrit que $x-p(x)$ est orthogonal aux u_j, ou encore :

$$\forall i\in\{1,\ldots,m\},\ <u_i,p(x)>=<u_i,x>$$

Puisque $p(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\, u_j$, ces égalités deviennent :

$$\forall i\in\{1,\ldots,m\}, \sum_{j=1}^m <u_i,u_j>\ \lambda_j = <u_i,x>$$

Mais ce système d'équations (aux inconnues λ_j) se traduit matriciellement en :

$$G\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<u_1,x>\\<u_2,x>\\\vdots\\<u_m,x>\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}=G^{-1}\begin{pmatrix}<u_1,x>\\<u_2,x>\\\vdots\\<u_m,x>\end{pmatrix}$$

car G est inversible. [Q]

5. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.
En effet, on a maintenant $F=E$ et $p(x)=x$ pour tout vecteur x.
La matrice de Gram de $u_1,\ldots,u_n$ est carrée d'ordre n et inversible.
Si on pose $x=\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j\, u_j$, les composantes λ_j de x dans la base (u) s'obtiennent en fonction des produits scalaires $<u_j,x>$ en écrivant : $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=G^{-1}\begin{pmatrix}<u_1,x>\\<u_2,x>\\\vdots\\<u_n,x>\end{pmatrix}$ [Q]

6. La matrice H, symétrique réelle, est diagonalisable dans le groupe orthogonal.
Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$H=PDP^{-1}=PD\,{}^{\mathrm{T}}P$$

Mais les coefficients diagonaux λ_k de D sont les valeurs propres de H, dont on sait qu'elle sont toutes positives ou nulles.
Si on note Δ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\mu_k=\sqrt{\lambda_k}$, alors on a légalité matricielle $D=\Delta^2=\Delta\,{}^{\mathrm{T}}\Delta$.
On peut donc écrire $H=P\Delta\,{}^{\mathrm{T}}\Delta\,{}^{\mathrm{T}}P=P\Delta\,{}^{\mathrm{T}}(P\Delta)={}^{\mathrm{T}}NN$, avec $N={}^{\mathrm{T}}(P\Delta)$.
Avec ces notations, H est la matrice de Gram des vecteurs colonnes $v_1,\ldots,v_n$ de N. [Q]