



## Décomposition QR. Méthode de Householder

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure canonique d'espace euclidien, pour laquelle la base canonique  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$  est orthonormée.

On notera  $[x]$  la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ .

On rappelle que pour tous vecteurs  $x$  et  $y$ ,  $\langle x, y \rangle = {}^T[x][y]$ .

### Partie I

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On appelle *décomposition QR* de  $A$  tout couple  $(Q, R)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = QR$ ,  $Q$  étant une matrice orthogonale (un élément du groupe  $O(n)$ ) et  $R$  une matrice triangulaire supérieure.

Dans toute la suite, on suppose que  $A$  est inversible (il en est donc de même de  $R$ ).

1. En invoquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer l'existence de la décomposition  $A = QR$  si on suppose que les coefficients diagonaux de la matrice  $R$  sont strictement positifs. [S]
2. Par un raisonnement purement matriciel, montrer alors l'existence et l'unicité de la décomposition  $QR$  de  $A$  quand on fixe à l'avance et de manière quelconque le signe de chacun des coefficients diagonaux de  $R$ . [S]

### Partie II

Dans cette partie, on étudie une méthode permettant de trouver une décomposition  $QR$  d'une matrice inversible  $A$ , et utilisant des produits successifs par des matrices de réflexions (dites *matrices de Householder*).

1. (a) Comment s'écrit la réflexion (c'est-à-dire la symétrie orthogonale)  $h$  par rapport à l'hyperplan orthogonal à un vecteur non nul  $a$ ? [S]  
(b) Montrer que sa matrice dans la base canonique est  $H = I_n - \frac{2}{\|a\|^2} [a] {}^T[a]$ .  
On dit que  $H$  est la *matrice de Householder* associée à  $a$ . [S]  
(c) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs distincts de  $\mathbb{R}^n$  et de même norme, alors il existe une réflexion unique  $h$  telle que  $h(u) = v$ . [S]  
(d) Etudier l'existence d'une réflexion  $h$  transformant un vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $v = \lambda e_1$  colinéaire à  $e_1$ . On illustrera la situation par un schéma. [S]  
(e) Plus généralement, soit  $i$  un indice de  $\{1, \dots, n\}$ , et  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  
On pose  $v = (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda, 0, \dots, 0)$  et  $w = (0, \dots, 0, x_j, \dots, x_n)$ .  
Etudier l'existence d'une réflexion  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  transformant  $u$  en  $v$ .  
Que dire des vecteurs  $e_1, \dots, e_{j-1}$  pour l'application  $h$ ? [S]



2. Dans la suite de cette question, et pour des commodités de notation, on ajoutera la matrice identité  $I_n$  à l'ensemble des matrices de Householder.

- (a) Dédire de ce qui précède qu'il existe  $n-1$  matrices de Householder  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  telles que pour tout  $j$  les coefficients sous-diagonaux des  $j$  premières colonnes de  $A_j = H_j H_{j-1} \cdots H_1 A$  soient nuls. [S]
- (b) Montrer comment des produits successifs par les matrices  $H_j$  permettent d'obtenir séparément les composantes  $Q$  et  $R$  d'une décomposition  $QR$  de la matrice  $A$ . [S]

- (c) Illustrer cette méthode en décomposant  $A = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}$  [S]

## Corrigé du problème

### Partie I

1. La matrice  $A$  étant inversible, ses vecteurs colonnes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (considérés comme éléments de  $\mathbb{R}^n$ ) forment une base  $(a)$  de  $\mathbb{R}^n$ , notée  $(a)$ .

$A$  est alors la matrice de passage  $P_{e,a}$  de la base canonique  $(e)$  à la base  $(a)$ .

Soient  $Q$  et  $R$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , telles que  $A = QR$ .

Ces deux matrices sont nécessairement inversibles ( $\det Q \det R = \det A \neq 0$ ).

Les vecteurs colonnes  $q_1, q_2, \dots, q_n$  de  $Q$  forment donc une base  $(q)$  de  $\mathbb{R}^n$ , et  $Q$  est la matrice de passage  $P_{e,q}$  de la base  $(e)$  à la base  $(q)$ .

L'égalité  $A = QR$  équivaut alors à  $R = Q^{-1}A = P_{q,e}P_{e,a} = P_{q,a}$ .

Ainsi  $R$  est la matrice de passage de la base  $(q)$  à la base  $(a)$ .

Dans ces conditions :

- Dire que  $Q$  est orthogonale, c'est dire que  $(q)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .
- Dire que  $R$  est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, c'est dire que, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,  $a_k$  est une combinaison linéaire de  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , sa composante sur  $q_k$  étant strictement positive.

On reconnaît là les conditions décrivant l'orthonormalisation de la famille  $a_1, a_2, \dots, a_n$  par le procédé de Schmidt.

On sait que ce procédé est constructif. Il prouve ainsi l'existence d'une famille  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (donc une matrice  $Q$  et une matrice  $R$ ), ce qui établit le résultat. [Q]

2. – Existence :

Soit  $A = Q^+R^+$  la décomposition évoquée dans la question précédente (les coefficients diagonaux de  $R$  étant strictement positifs.)

Soit  $X$  un sous-ensemble quelconque de  $\{1, \dots, n\}$ .

Soit  $J$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux successifs  $\lambda_i$  valent 1 si  $i$  est dans  $X$  et  $-1$  sinon : c'est une matrice orthogonale qui vérifie  $J^2 = I_n$ .

L'égalité  $A = Q^+R^+$  s'écrit donc aussi  $A = QR$  avec  $Q = Q^+J$  et  $R = JR^+$ .

La matrice  $Q$  est orthogonale (elle se déduit de  $Q^+$  en inversant les signes dans les colonnes d'indice  $j \notin X$ ) et  $R$  est triangulaire supérieure (elle se déduit de  $R^+$  en inversant les signes dans les lignes d'indice  $i \notin X$ ).

On a ainsi formé une décomposition  $A = QR$  de  $A$  pour laquelle le signe des coefficients diagonaux de  $R$  est fixé à l'avance.

Il reste à prouver l'unicité d'une telle décomposition.

- Unicité :

Supposons que la matrice  $A$  possède deux décompositions,  $A = Q_1R_1$  et  $A = Q_2R_2$ , les coefficients diagonaux respectifs de  $R_1$  et de  $R_2$  ayant le même signe.

Il faut montrer  $Q_1 = Q_2$  et  $R_1 = R_2$ .

L'égalité  $Q_1R_1 = Q_2R_2$  donne  $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$ .



La matrice  $M = R_2 R_1^{-1}$  est, tout comme  $R_1$  et  $R_2$ , triangulaire supérieure.

Ses coefficients diagonaux sont les quotients deux à deux de ceux de  $R_2$  et  $R_1$  et sont donc strictement positifs.

Puisque  $O(n)$  est un groupe, la matrice  $M = Q_2^{-1} Q_1$  est une matrice orthogonale.

La matrice  $M^{-1}$  est donc à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (comme inverse et comme transposée d'une matrice ayant cette propriété.) Les matrices  $M$  et  $M^{-1}$  sont donc diagonales.

Du fait de l'égalité  $M^{-1} = {}^T M$ , chaque coefficient diagonal de  $M$  est égal à son propre inverse et vaut donc à priori  $\pm 1$ .

Mais on sait que ces coefficients sont positifs : ils sont donc égaux à 1.

On en déduit  $M = I_n$ , c'est-à-dire  $Q_1 = Q_2$  et  $R_1 = R_2$ .

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité de la décomposition  $A = QR$  (sous réserve d'existence) dans le cas où on impose à l'avance le signe de chacun des coefficients diagonaux de  $R$ .

Au total, on peut donc considérer que  $A$  possède  $2^n$  décompositions  $A = QR$ , chacune d'elles se déduisant de la décomposition  $A = Q^+ R^+$  en inversant le signe d'une ou de plusieurs colonnes de  $Q^+$  et celui des lignes de même indice dans  $R^+$ .

[Q]

## Partie II

1. (a) Cette réflexion est définie par :  $\forall u \in \mathbb{R}^n, h(u) = u - \frac{2}{\|a\|^2} \langle a, u \rangle a$ . [Q]

(b) Pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$[h(u)] = [u] - \frac{2}{\|a\|^2} {}^T [a][u] [a] = [u] - \frac{2}{\|a\|^2} [a] {}^T [a] [u] = \left( I_n - \frac{2}{\|a\|^2} [a] {}^T [a] \right) [u]$$

Remarque : on a pu écrire  ${}^T [a][u] [a] = [a] {}^T [a] [u]$  car  ${}^T [a][u]$  est un scalaire.

Le calcul précédent montre bien que  $H = I_n - \frac{2}{\|a\|^2} [a] {}^T [a]$  [Q]

(c) Une réflexion  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  est déterminée de manière unique par l'hyperplan  $(\Pi)$  par rapport auquel on effectue la symétrie orthogonale.

Si la réflexion  $h$  existe, alors le vecteur non nul  $u - v$  est orthogonal à l'hyperplan  $(\Pi)$ , ce qui détermine  $(\Pi)$  et donc  $h$  de manière unique.

Réciproquement, soit  $h$  la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $u - v$ .

$$h(u) = u - \frac{2}{\|u - v\|^2} \langle u - v, u \rangle (u - v) = u - \frac{1}{\|u - v\|^2} \langle u - v, 2u \rangle (u - v)$$

Or  $u$  et  $v$  ont même norme. Donc  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ .

On peut alors écrire  $\langle u - v, 2u \rangle = \langle u - v, (u + v) + (u - v) \rangle = \|u - v\|^2$ .

On en déduit :  $h(u) = u - \frac{1}{\|u - v\|^2} \|u - v\|^2 (u - v) = v$ .

Conclusion : si  $u$  et  $v$  sont distincts et de même norme, il existe une réflexion  $h$  et une seule qui transforme  $u$  en  $v$ .

Remarque : si  $u = v$ , toute réflexion  $h$  par rapport à un hyperplan contenant  $u$  laisse le vecteur  $u$  invariant et vérifie donc  $h(u) = v \dots$  [Q]

(d) Si  $u$  est lui-même colinéaire à  $e_1$ , toute réflexion laissant invariant  $e_1$  convient.

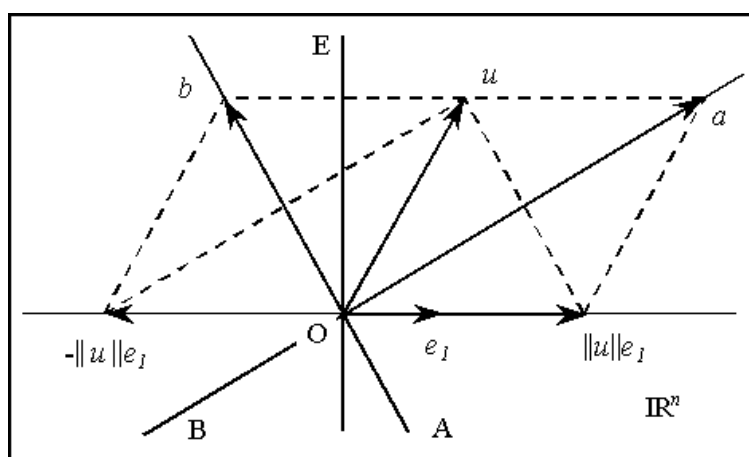
On suppose donc qu'il n'en est pas ainsi.

Puisqu'une réflexion conserve la norme, on a nécessairement  $|\lambda| = \|u\|$ . On a donc deux possibilités :  $\lambda = \varepsilon \|u\|$ , avec  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .

Les vecteurs  $u$  et  $v = \lambda e_1$  étant distincts, il y a une solution  $h$  unique pour chaque valeur de  $\lambda$  : c'est la réflexion  $h$  associée au vecteur  $a = u - v = u - \varepsilon \|u\| e_1$ .

Si  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , alors  $a = (x_1 - \varepsilon \|u\|, x_2, \dots, x_n)$ .

La figure ci-dessous illustre la situation, avec des notations évidentes :



[Q]

(e) Si  $u$  est combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_j$ , toute réflexion laissant invariant ces vecteurs convient. On suppose que tel n'est pas le cas, ce qui revient à dire que le vecteur  $w$  n'est pas colinéaire à  $e_j$ .

Avec les notations de l'énoncé,  $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{j-1} x_k^2 + \lambda^2$  et  $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{j-1} x_k^2 + \|w\|^2$ .

On a donc nécessairement  $|\lambda| = \|w\|$ , c'est-à-dire  $\lambda = \varepsilon \|w\|$ , avec  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .

Par hypothèse,  $u$  et  $v$  sont distincts. Pour chacune des deux valeurs de  $\lambda$ , il y a donc une solution unique qui est la réflexion  $h$  par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $a = u - v = (0 \dots, 0, u_j - \varepsilon \|w\|, u_{j+1}, \dots, u_n) = w - \varepsilon \|w\| e_j$ .

Puisque  $e_1, \dots, e_{j-1}$  sont orthogonaux au vecteur  $a$ , ils sont invariants par  $h$ . [Q]

2. (a) Dans cette question, on identifie les colonnes de  $A$  (et des matrices qui vont se déduire de  $A$ ) avec des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , et les matrices de Householder avec les transformations orthogonales correspondantes dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On va démontrer le résultat par une récurrence finie sur l'indice de colonne  $j$ .

- Traitement de la première colonne :

Soit  $u$  le premier vecteur-colonne de  $A$ .

Si ce vecteur est colinéaire à  $e_1$  (c'est-à-dire si les coefficients sous-diagonaux de la première colonne de  $A$  sont déjà nuls) on pose  $H = I_n$ .

Sinon on sait qu'il existe une réflexion  $H_1$  telle que le vecteur  $v = H_1 u$  soit proportionnel à  $e_1$ . Mais  $v$  est le premier vecteur-colonne de  $A_1 = H_1 A$ , ce qui établit la propriété au rang 1.

- Traitement de la  $j$ -ième colonne :

Soit  $j$  un entier compris entre 1 et  $n-2$ . On suppose que les matrices  $H_1, \dots, H_{j-1}$  sont connues. Avec les notations de l'énoncé cela signifie que les coefficients sous-diagonaux des  $j-1$  premières colonnes de  $A_{j-1}$  sont nuls.

S'il en est de même pour le  $j$ -ème vecteur-colonne de  $A_{j-1}$ , alors on pose  $H_j = I_n$  et donc  $A_j = A_{j-1}$ .

Sinon soit  $u$  le  $j$ -ième vecteur-colonne de  $A_{j-1}$  : on sait qu'il existe une réflexion  $H_j$  qui envoie  $u$  sur un vecteur  $v$  combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_j$ .

On sait également que cette réflexion laisse invariant les vecteurs  $e_1, \dots, e_{j-1}$ . Elle ne modifie donc pas les  $j-1$  premiers vecteurs-colonnes de  $A_{j-1}$ .

Ainsi les coefficients sous-diagonaux des  $j$  premières colonnes de  $A_j = H_j A_{j-1}$  sont égaux à 0, ce qui démontre la propriété au rang  $j$ .

- Conclusion :

On a démontré l'existence des  $n-1$  matrices de Householder  $H_1, \dots, H_{n-1}$ .

On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité car à chaque étape on a en général deux possibilités suivant le signe donné au  $j$ -ème coefficient diagonal de  $A_j$ .

[Q]

- (b) Avec les notations précédentes, la matrice  $R = A_{n-1} = H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A$  est triangulaire supérieure. Tout comme les matrices  $H_j$  et la matrice  $A$ , elle est inversible (ses coefficients diagonaux sont non nuls.)

On note que chaque  $H_j$  est orthogonale et vérifie  $H_j^{-1} = H_j$  (c'est normal pour des matrices de réflexion, mais c'est bien sûr vrai si certaines  $H_j$  sont égales à  $I_n$ ).

On peut alors écrire, en posant  $Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$  :

$$A = (H_{n-1} \cdots H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1} R = H_1 H_2 \cdots H_{n-1} R = QR$$

La matrice  $Q$  est orthogonale car elle est un produit de matrices orthogonales. On a donc obtenu une décomposition  $QR$  de la matrice  $A$ .

Dans la pratique, on passe de  $A$  à  $R$  en multipliant à gauche (et successivement) par la matrice  $H_1$ , puis par la matrice  $H_2$ , etc.

Si on applique ces mêmes multiplications mais à droite et en partant de  $I_n$ , alors on forme successivement les matrices  $H_1$ ,  $H_1 H_2$  et finalement  $Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$ . [Q]

(c) – Traitement de la première colonne :

Le premier vecteur colonne de  $A$  est  $u_1 = (-4, -4, -8, 23)$ .

La norme de ce vecteur est  $\|u_1\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2 + 23^2} = 25$ .

On va transformer  $u_1$  en le vecteur  $v_1 = (25, 0, 0, 0)$  au moyen de la réflexion  $h_1$  par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur  $a_1 = u_1 - \|u_1\| e_1 = (-29, -4, -8, 23)$ .

Le carré de la norme de  $a_1$  est :

$$2\|u_1\|^2 - 2\|u_1\| \langle u_1, e_1 \rangle = 2\|u_1\|^2 + 8\|u_1\| = 2 \cdot 25 \cdot 29 = 2 \cdot 725$$

La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned} H_1 &= I_n - \frac{2}{\|a_1\|^2} [a_1]^T [a_1] = I_n - \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -29 \\ -4 \\ -8 \\ 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -29 & -4 & -8 & 23 \end{pmatrix} \\ &= I_n - \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 841 & 116 & 232 & -667 \\ 116 & 16 & 32 & -92 \\ 232 & 32 & 64 & -184 \\ -667 & -92 & -184 & 529 \end{pmatrix} = \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & 196 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A_1 = H_1 A &= \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & 196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \frac{25}{29} \begin{pmatrix} 29 & -29 & 58 & 29 \\ 0 & -42 & -15 & 167 \\ 0 & 32 & -88 & -69 \\ 0 & 24 & 21 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– Traitement de la deuxième colonne :

Le deuxième vecteur colonne de  $A_1$  est  $u_2 = \frac{25}{29}(-29, -42, 32, 24)$ .

Posons  $w = \frac{25}{29}(0, -42, 32, 24)$  (voir les notations de la question II-1-e.)

La norme de ce vecteur est  $\|w\| = \frac{25}{29}\sqrt{42^2 + 32^2 + 24^2} = 50$ .

On sait qu'on doit appliquer la réflexion  $h_2$  par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $w - \|w\| e_2 = \frac{100}{29}(0, -25, 8, 6)$ . Pour simplifier, on choisit  $a_2 = (0, -25, 8, 6)$ .

Le carré de la norme de  $a_2$  est :  $25^2 + 8^2 + 6^2 = 725$ .

La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= I_n - \frac{2}{\|a_2\|^2} [a_2]^T [a_2] = I_n - \frac{2}{725} \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} (0, -25, 8, 6) \\
 &= I_n - \frac{2}{725} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & -200 & -150 \\ 0 & -200 & 64 & 48 \\ 0 & -150 & 48 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 400 & 300 \\ 0 & 400 & 597 & -96 \\ 0 & 300 & -96 & 653 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On en déduit la matrice  $A_2 = H_2 A_1 = H_2 H_1 A$  :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 400 & 300 \\ 0 & 400 & 597 & -96 \\ 0 & 300 & -96 & 653 \end{pmatrix} \frac{25}{29} \begin{pmatrix} 29 & -29 & 58 & 29 \\ 0 & -42 & -15 & 167 \\ 0 & 32 & -88 & -69 \\ 0 & 24 & 21 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & -72 & -17 \\ 0 & 0 & 21 & 31 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On trouve alors la matrice  $H_1 H_2$  :

$$\begin{aligned}
 H_1 H_2 &= \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & 196 \end{pmatrix} \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 400 & 300 \\ 0 & 400 & 597 & -96 \\ 0 & 300 & -96 & 653 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{625} \begin{pmatrix} -100 & 200 & -296 & 503 \\ -100 & -425 & 304 & 328 \\ -200 & 400 & 433 & 56 \\ 575 & 100 & 152 & 164 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

– Traitement de la troisième colonne :

Le troisième vecteur colonne de  $A_2$  est  $u_3 = (50, -25, -72, 21)$ .

Posons  $w = (0, 0, -72, 21)$ . La norme de ce vecteur est  $\|w\| = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75$ .

On sait qu'on doit appliquer la réflexion  $h_3$  par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $a_3 = w - \|w\| e_3 = (0, 0, -147, 21)$ .

Le carré de la norme de  $a_3$  est :  $147^2 + 21^2 = 22050$ .



La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned}
 H_3 &= I_n - \frac{2}{\|a_3\|^2} [a_3]^T [a_3] = I_n - \frac{1}{11025} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -147 \\ 21 \end{pmatrix} (0, 0, -147, 21) \\
 &= I_n - \frac{1}{11025} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21609 & -3087 \\ 0 & 0 & -3087 & 441 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 24 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On en déduit la matrice  $R = A_3 = H_3 A_2 = H_3 H_2 H_1 A$  :

$$R = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & -72 & -17 \\ 0 & 0 & 21 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Enfin, voici  $Q = H_1 H_2 H_3$  :

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{625} \begin{pmatrix} -100 & 200 & -296 & 503 \\ -100 & -425 & 304 & 328 \\ -200 & 400 & 433 & 56 \\ 575 & 100 & 152 & 164 \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 24 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 17 & 16 \\ -4 & -17 & -8 & 16 \\ -8 & 16 & -16 & 7 \\ 23 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La décomposition de  $A$  est alors terminée :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}}_{A \text{ inversible}} = \frac{1}{25} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 8 & 17 & 16 \\ -4 & -17 & -8 & 16 \\ -8 & 16 & -16 & 7 \\ 23 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}}_{Q \text{ orthogonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}}_{R \text{ triangulaire}}$$

[Q]