Convergence d'une série au sens d'Abel

Définitions et notations.

- On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels.
- On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ tels que la série $\sum u_n$ converge.
- On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de réels telles que la série entière $\sum u_n x^n$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (éventuellement infini).
- Pour un élément $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{S}$, soit $f_u : [0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
- On dit qu'une série réelle $\sum u_n$ *converge au sens d'Abel* si :
  - ◇ La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\mathcal{S}$.
  - ◇ La fonction f_u admet une limite finie quand x tend vers 1 à gauche.

    Cette limite est appelée *somme d'Abel* de la série $\sum u_n$ et on pourra la noter $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n$.
- On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum a_n$ converge au sens d'Abel.

  Pour tout élément u de $\mathcal{A}$, on prolongera l'application f_u en 1 en posant $f_u(1) = \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n$.

Énoncé.

1. (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. [S]
   (c) Montrer que si $\sum u_n$ converge au sens d'Abel, alors f_u est continue sur $[0, 1]$. [S]
   (d) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. [S]
2. Etudier, dans les trois cas suivants, la convergence au sens usuel et la convergence au sens d'Abel, en précisant, quand elles existent, la valeur de la somme usuelle et de la somme d'Abel de la série :
   (a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$; $\quad v_n = (-1)^n(n + 1)$; $\quad w_0 = 0$ et $w_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2n}$ pour $n \geq 1$. [S]
   (b) Les deux types de convergence coïndicent-ils ? [S]
3. Dans cette question, on veut montrer que si $u \in \mathcal{C}$ alors $u \in \mathcal{A}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n$.

   Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{C}$, ce qui signifie que la série $\sum u_n$ converge.
   On note S sa somme et R le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$. Donc $R \geq 1$.

   (a) Si $R > 1$, montrer que $\sum u_n$ converge au sens d'Abel et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n$. [S]
   (b) On suppose $R = 1$. On se donne un réel strictement positif ε.

   Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$ pour $0 \leq x \leq 1$.

i. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|R_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. [S]

ii. Pour tous entiers n et p tels que $p > n+1$, établir l'égalité :

$$\forall x \in [0,1], S_p(x) - S_n(x) = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} R_k(x^{k+1} - x^k) - R_p x^p. \text{ [S]}$$

iii. En déduire que pour $p > n+1 > N$, on a : $\forall x \in [0,1], |S_p(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon$. [S]

iv. Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$ vers une fonction $\widehat{f}$ que l'on précisera. [S]

v. Conclure. [S]

(c) Appliquer ce qui précède au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. [S]

4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente vers 0.

   Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est également convergente vers 0. [S]

5. Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n u_n = 0$.

   On va montrer que u appartient à $\mathcal{C}$.

   On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = f_u\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   (a) Montrer que pour tout x de $[0,1]$ et tout k de $\mathbb{N}^*$, on a $\left|(1-x)^k - 1\right| \leq kx$. [S]

   (b) En déduire que $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) u_k\right| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,|u_k|$. [S]

   (c) Montrer que $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k u_k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. [S]

   (d) Déduire de ce qui précède que la suite (v_n) converge vers 0. [S]

   (e) Conclure. [S]

6. Soient p un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles qui sont p-périodiques. Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{P}$.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit élément de $\mathcal{C}$. [S]

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit élément de $\mathcal{A}$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Tout d'abord $\mathcal{S}$ est non vide car la suite nulle appartient à $\mathcal{S}$.
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de $\mathcal{S}$.
Soient R, R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum u_n x^n, \sum v_n x^n$.
Ainsi $R \geq 1$ et $R' \geq 1$. Soient α et β deux scalaires.
On sait que $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)x^n$ a un rayon de convergence $R'' \geq \min(R, R')$.
Donc $R'' \geq 1$, ce qui prouve que la suite de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ appartient à $\mathcal{S}$.
Conclusion : $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. [Q]

(b) $\mathcal{C}$ est non vide car il contient la suite nulle.
Notons que $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{S}$.
En effet si la série $\sum u_n$ est convergente alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ est au moins égal à 1 (rappelons que R est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ soit bornée.)
Enfin si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites de $\mathcal{C}$, et si α et β sont deux scalaires, alors la série $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge.
La suite de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ appartient donc à $\mathcal{C}$.
Conclusion : $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. [Q]

(c) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{A}$.
On sait déjà que f_u est continue sur $[0, 1[$ (une série entière est en effet de somme continue sur son intervalle ouvert de convergence donc ici au moins sur $]-1, 1[$.)
D'autre part la définition $f_u(1) = \lim\limits_{x\to 1-} f_u(x)$ prouve que f_u est continue au point 1.
Conclusion : pour tout élément u de $\mathcal{A}$, l'application f_u est continue sur $[0, 1]$. [Q]

(d) Par définition, $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{S}$ (non vide car contenant la suite nulle.)
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de $\mathcal{A}$, et soient α et β deux scalaires.
On sait que la suite w de terme général $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ appartient à $\mathcal{S}$.
On a immédiatement :
$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)x^n = \alpha \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n + \beta \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \alpha f_u(1) + \beta f_v(1)$$
La suite w appartient donc à $\mathcal{A}$ et : $\forall x \in [0, 1],\ f_w(x) = \alpha f_u(x) + \beta f_v(x)$.
Conclusion : $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. [Q]

2. (a) – Premier cas : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n} = \cos x$ (ici $R = +\infty$.)
En particulier $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \cos 1$ (somme au sens usuel.)

$f_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \cos\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en 1 : $\lim_{x\to 1-} f_u(x) = \cos 1$.

Ainsi la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n$.

Remarque : on a ce résultat à chaque fois que R vérifie $R > 1$.

– Deuxième cas :

$\sum v_n$ est grossièrement divergente. Il n'y a donc pas convergence au sens usuel.

On constate que $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = 1$.

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum v_n x^n$ vaut donc 1 (D'alembert.)

$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ est la série dérivée de $g(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^{n+1} = -\dfrac{(-x)}{1-(-x)} = \dfrac{x}{1+x}$.

On a donc : $\forall x \in]-1,1[,\ f_v(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)' = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

En particulier : $\lim_{x\to 1-} f_v(x) = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion : la série $\sum v_n$ converge au sens d'Abel et on a : $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} v_n = \dfrac{1}{4}$.

– Troisième cas :

$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, primitive s'annulant en 0 de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Ainsi le rayon R vaut 1 et pour tout x de $]-1,1[$: $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

On en déduit $\lim_{x\to 1-} f_w(x) = +\infty$.

La série $\sum w_n$ n'est donc pas convergente au sens d'Abel.

Enfin la série $\sum w_n$, qui s'écrit $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{2n+1}$, est divergente au sens usuel.

[Q]

(b) Les exemples précédents montrent qu'il existe des séries :

– Divergentes au sens usuel et au sens d'Abel.

– Convergentes au sens usuel et au sens d'Abel.

– Divergentes au sens usuel mais convergentes au sens d'Abel.

Les deux types de convergence ne coïndicent donc pas. [Q]

3. (a) On sait que $g_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est définie et continue sur $]-R,R[$.

Ici cet intervalle contient strictement $[-1,1]$.

Sur $[0,1[$, la fonction g_u n'est autre que f_u.

On a alors $\lim_{x\to 1-} f_u(x) = \lim_{x\to 1-} g_u(x) = g_u(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$.

Ainsi $\sum u_n$ converge au sens d'Abel et $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} = S$.

Le premier exemple vu en (2a) illustre cette situation. [Q]

(b) i. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow$ les sommes partielles $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ convergent vers S.

Cela implique que la suite de terme général $R_n = S - S_n(1)$ converge vers 0.

Donc il existe un entier N de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. [Q]

ii. Soient n et p deux entiers, avec $p > n+1$. Pour tout x de $[0,1]$:

$$\begin{aligned} S_p(x) - S_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{p} u_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (R_{k-1} - R_k) x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} R_{k-1}\, x^k - \sum_{k=n+1}^{p} R_k x^k = \sum_{k=n}^{p-1} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} R_k x^k \quad \text{[Q]} \\ &= R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} R_k (x^{k+1} - x^k) - R_p x^p. \end{aligned}$$

iii. Soient n et p deux entiers, avec $N \leq n < p-1$.

Dans l'égalité précédente, on majore les $|R_k|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit : $\forall x \in [0,1]\, |S_p(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\Big(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p\Big)$

Or $\sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) = x^{n+1} - x^p$.

On en déduit : $\forall x \in [0,1], |S_p(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon x^{n+1} \leq \varepsilon$. [Q]

iv. On sait que $\forall x \in [0,1[, \lim_{p\to+\infty} S_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = f_u(x)$.

D'autre part, $\lim_{p\to+\infty} S_p(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$.

Dans l'inégalité précédente, on fait tendre p vers $+\infty$ (avec n et x fixés).

On obtient donc :

$\forall n \geq N, \forall x \in [0,1], \left|\widehat{f}(x) - S_n(x)\right| \leq \varepsilon$, avec $\begin{cases} \forall x \in [0,1[, \widehat{f}(x) = f_u(x) \\ \widehat{f}(1) = S \end{cases}$

Cela prouve que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\widehat{f}$. [Q]

v. Les applications S_n sont continues sur $[0,1]$.

La convergence uniforme implique que $\widehat{f}$ est également continue sur $[0,1]$.

En particulier $\widehat{f}(1) = \lim_{x\to 1-} \widehat{f}(x)$, c'est-à-dire : $\lim_{x\to 1-} f_u(x) = S$.

Cela prouve que la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel et que $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n = S$.

On a ainsi montré dans tous les cas ($R > 1$ ou $R = 1$) que si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est élément de $\mathcal{C}$ alors elle est élément de $\mathcal{A}$.

On peut même ajouter qu'on a l'égalité : $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathcal{A}}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$. [Q]

(c) On sait que cette série $\sum u_n$ est convergente (critère spécial des séries alternées.)
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de rayon 1 et : $\forall x \in]-1,1[, xS(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$.

Donc $\forall x \in [0,1[, f_u(x) = S(x) = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

La convergence de $\sum u_n$ au sens usuel implique la convergence au sens d'Abel, avec :

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{x\to 1-} f_u(x) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Conclusion : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$. [Q]

4. On se donne un réel $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On peut alors écrire, pour tout $n \geq n_0$:

$$|v_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + (n-n_0+1)\frac{\varepsilon}{2}\Big) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il reste alors à choisir un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on a donc trouvé un entier n_1 tel que $n \geq n_1 \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon$.
Conclusion : on a bien $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. [Q]

5. (a) Posons $\varphi(x) = (1-x)^k$, avec $x \in [0,1]$.
L'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne :
$\forall x \in [0,1], \left|(1-x)^k - 1\right| = |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq x \sup_{t\in[0,x]} |\varphi'(t)|$.

Or $\forall t \in [0,x], \varphi'(t) = -k(1-t)^{k-1}$ et donc $|\varphi'(t)| \leq k$.

On a ainsi montré : $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, \left|(1-x)^k - 1\right| \leq kx$. [Q]

(b) $\left|\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^k - 1\right| \leq \dfrac{k}{n}$ n'est autre que l'inégalité précédente où on a posé $x = \dfrac{1}{n}$.

On en déduit : $\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^k - 1\right)u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^k - 1\right| |u_k| \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\,|u_k|$.

[Q]

(c) Notons tout d'abord que V_n est bien défini.
En effet la série $\sum u_k x^k$ converge pour tout x de $]-1,1[$ et en particulier si $x = 1-\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui assure l'existence de V_n, reste d'indice n de cette série.
On se donne un réel $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |nu_n| \leq \varepsilon$.
On peut alors écrire, pour tout $n \geq n_0$: $|V_n| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{k}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k \leq \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k$.
Toujours en majorant : $|V_n| \leq \displaystyle\frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k = \frac{\varepsilon}{n}\frac{1}{1-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)} = \varepsilon$.
Conclusion : on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$. [Q]

(d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}|v_n| &= \left|f_u\Big(1-\frac{1}{n}\Big) - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k - 1\right) u_k\right| + V_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\,|u_k| + V_n.\end{aligned}$$

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$. D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\,|u_k| = 0$.
Compte tenu des calculs précédents, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. [Q]

(e) Le résultat précédent signifie que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(f_u\Big(1-\frac{1}{n}\Big) - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) = 0$.
On écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = f_u\Big(1-\frac{1}{n}\Big) - v_n$.
On utilise aussi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_u\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \lim_{x\to 1-} f_u(x)$.
On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{x\to 1-} f_u(x) = \mathop{\mathcal{A}}_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Autrement dit : la série $\sum u_n$ est convergente (au sens usuel) et sa somme (toujours au sens usuel) est égale à sa somme au sens d'Abel.
On peut donc résumer :
- Si u appartient à $\mathcal{C}$, alors u appartient à $\mathcal{A}$: c'est le résultat de la question (3).
- La réciproque est fausse d'après le deuxième exemple vu en (2a)
- Si u appartient à $\mathcal{A}$ et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$, alors u appartient à $\mathcal{C}$: c'est le résultat de la question (5).

[Q]

6. (a) Si la suite u est élément de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

En particulier, pour tout k de $\{0,\ldots,p-1\}$, $\lim_{n\to+\infty} u_{np+k} = 0$. Or $u_{np+k} = u_k$.

Ainsi les p premiers éléments $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ de la suite u sont nuls.

La suite u étant p-périodique, elle est donc identiquement nulle.

La réciproque est évidente. [Q]

(b) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{A}$.

Pour tout x de $[0,1[$, et en utilisant la p-périodicité :

$$f_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{k=0}^{p-1}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{np+k}\, x^{np+k}\Big) = \sum_{k=0}^{p-1}\Big(u_k x^k \sum_{n=0}^{+\infty}(x^p)^n\Big) = \frac{1}{1-x^p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k x^k.$$

Quand $x \to 1$, $\dfrac{1}{1-x^p}$ est équivalent à $\dfrac{1}{p(1-x)}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k x^k$ tend vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k$.

Donc $\lim_{x\to 1-} f_u(x)$ est finie si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k = 0$: c'est la condition recherchée.

[Q]