

Déterminants de Hankel

Comme d'habitude, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit (u_n) une suite de \mathbb{K} .

Pour tous entiers n et p , on note :
$$M(n, p) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \cdots & u_{n+2p} \end{pmatrix}$$

$M(n, p)$ appartient donc à $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$.

Par exemple, pour tout n de \mathbb{N} ,

$$M(n, 0) = (u_n), \quad M(n, 1) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}, \quad M(n, 2) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{pmatrix}$$

On note $\Delta(n, p) = \det M(n, p)$.

Pour tout entier $p \geq 0$, on note \mathcal{S}_p l'ensemble des suites (u_n) de \mathbb{K} telles que le déterminant $\Delta(n, p)$ soit nul pour tout entier n .

L'objet de ce problème est d'étudier les suites (u_n) de \mathcal{S}_p .

Partie I

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , avec $n \geq 2$.

On note $\text{Com } A$ la comatrice de A .

1. Rappeler la valeur du produit $({}^T \text{Com } A)A$. [S]
2. Montrer successivement que :
 - (a) Si $\text{rg } A = n$, alors $\text{rg } \text{Com } A = n$. [S]
 - (b) Si $\text{rg } A = n - 1$, alors $\text{rg } \text{Com } A = 1$ (utiliser des applications linéaires.) [S]
 - (c) Si $\text{rg } A \leq n - 2$, alors $\text{rg } \text{Com } A = 0$. [S]
3. Si on note A_{ij} le cofacteur d'indice (i, j) de la matrice A , montrer que :
$$\det A = 0 \Rightarrow \forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4, \quad A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0.$$
 [S]

Partie II

1. Identifier \mathcal{S}_0 . [S]
2. Montrer que \mathcal{S}_1 est l'ensemble des suites géométriques. [S]
3. On suppose qu'il existe $p + 1$ scalaires non tous nuls a_0, a_1, \dots, a_p tels que, pour tout entier n , $a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p} = 0$.
Montrer alors que la suite (u_n) est élément de \mathcal{S}_p . [S]

Partie III

Dans cette partie, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1.

On suppose que la suite (u_n) est un élément de \mathcal{S}_p . On suppose qu'il existe un entier n_0 strictement positif tel que le déterminant $\Delta(n_0, p-1)$ soit non nul.

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $\Delta(n+2, p-1)\Delta(n, p-1) - \Delta^2(n+1, p-1) = 0$. [S]
2. En déduire la nature de la suite $n \rightarrow \Delta(n, p-1)$, et montrer que pour tout entier naturel n le déterminant $\Delta(n, p-1)$ est non nul. [S]
3. Montrer que pour entier n de \mathbb{N} , la matrice Com $M(n, p)$ est de rang 1. Montrer également que sa première et sa dernière lignes sont non identiquement nulles. [S]
4. Montrer que pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, la dernière ligne de Com $M(k, p)$ est égale ou opposée à la première ligne de Com $M(k-1, p)$. [S]
5. En déduire que la première ligne de Com $M(n, p)$ est un multiple non nul de la dernière ligne de Com $M(0, p)$. [S]
6. En développant $\Delta(n, p)$, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires a_0, a_1, \dots, a_p , avec $a_0 \neq 0$ et $a_p \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_p u_{n+p} = 0$. [S]

Partie IV

1. Déterminer les suites (u_n) telles que pour tout n de \mathbb{N} : $\begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{vmatrix} = 0$, avec $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 4$. [S]
2. Pour tous entiers n et p , calculer le déterminant

$$D(n, p) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & \dots & (n+p)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (n+p+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+p)^2 & (n+p+1)^2 & \dots & (n+2p)^2 \end{vmatrix}$$

[S]

Corrigé du problème

Partie I

- C'est du cours : $({}^T\text{Com } A)A = (\det A)I_n$. [Q]
- (a) L'égalité précédente donne $\det({}^T\text{Com } A) \cdot \det A = (\det A)^n$.
Ainsi $\det \text{Com } A = (\det A)^{n-1}$ puisque $\det A \neq 0$.
[Q] La comatrice de A , de déterminant non nul, est donc de rang n (invertible.)
(b) On munit \mathbb{K}^n de sa base canonique (e) .
 ${}^T\text{Com } A$ et A sont alors les matrices des endomorphismes respectifs g et f .
L'égalité $({}^T\text{Com } A)A = (\det A)I_n = 0_n$ s'écrit $g \circ f = 0$.
Cette égalité exprime l'inclusion $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.
Par hypothèse $\text{rg } f = n - 1$, et donc $\dim \text{Ker } g \geq n - 1$.
Puisque le rang de f (c'est-à-dire celui de A , c'est-à-dire l'ordre du plus grand déterminant extrait non nul de A) est égal à $n - 1$, l'un au moins des cofacteurs de A est non nul. Autrement dit $\text{Com } A \neq 0$, et donc $g \neq 0$.
L'inégalité $\dim \text{Ker } g \geq n - 1$ est donc une égalité. Ainsi $\text{rg } g = n - \dim \text{Ker } g = 1$. [Q]
(c) Si $\text{rg } A < n - 1$, tous les déterminants d'ordre $n - 1$ extraits de A sont nuls.
La comatrice de A est donc nulle : $\text{Com } A = 0$. [Q]
- Si $\det A = 0$, on sait maintenant que $\text{Com } A$ est de rang inférieur ou égal à 1.
En particulier, tous ses déterminants extraits d'ordre 2 sont nuls.
Autrement dit, pour tous indices i, j, k, l avec $i \neq j$ et $k \neq l$, on a :

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$$

Si $i = j$ ou si $k = l$, ce résultat est encore vrai (il est même évident.) [Q]

Partie II

- \mathcal{S}_0 est l'ensemble des suites (u_n) de \mathbb{K} telles que $\Delta(n, 0) = 0$ pour tout entier n .
Or $\Delta(n, 0) = u_n$: l'ensemble \mathcal{S}_0 se réduit donc à la suite nulle. [Q]
- Pour tout entier n , $\Delta(n, 1) = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{vmatrix} = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$.
 \mathcal{S}_1 est donc l'ensemble des suites (u_n) de \mathbb{K} telles que $u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2$ pour tout entier n .
On sait que cette égalité caractérise les suites géométriques. [Q]
- Si on écrit cette égalité aux rangs $n, n + 1, \dots, n + p$, on obtient :

$$a_0 \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p+1} \end{pmatrix} + \dots + a_p \begin{pmatrix} u_{n+p} \\ u_{n+p+1} \\ \vdots \\ u_{n+2p} \end{pmatrix} = 0$$

Cette égalité exprime que les colonnes du déterminant $\Delta(n, p)$ sont liées.

Ainsi $\Delta(n, p) = 0$ pour tout n , ce qui signifie que la suite (u_n) est dans \mathcal{S}_p . [Q]

Partie III

1. Notons A_{ij} le cofacteur d'indice (i, j) de la matrice $M(n, p)$.

$$\text{Il est clair que : } A_{11} = \begin{vmatrix} u_{n+2} & \cdots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p+1} & \cdots & u_{n+2p} \end{vmatrix} = \Delta_{n+2, p-1}$$

$$\text{et que : } A_{p+1, p+1} = \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p-1} & \cdots & u_{n+2p-2} \end{vmatrix} = \Delta_{n, p-1}$$

$$\text{D'autre part } A_{1, p+1} = A_{p+1, 1} = (-1)^p \begin{vmatrix} u_{n+1} & \cdots & u_{n+p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p} & \cdots & u_{n+2p-1} \end{vmatrix} = (-1)^p \Delta_{n+1, p-1}$$

Par hypothèse la matrice $M(n, p)$ est non inversible. On peut donc appliquer la question (I.3) qui donne en particulier : $A_{11}A_{p+1, p+1} - A_{1, p+1}A_{p+1, 1} = 0$.

Compte tenu de ce qui précède, cette relation s'écrit :

$$\Delta(n+2, p-1)\Delta(n, p-1) - \Delta^2(n+1, p-1) = 0. \quad [\text{Q}]$$

2. Le résultat précédent exprime que la suite de terme général $\delta_n = \Delta(n, p-1)$ vérifie, pour tout entier n , $\delta_{n+2}\delta_n = \delta_{n+1}^2$: on reconnaît la caractérisation des suites géométriques.

La suite $n \rightarrow \Delta(n, p-1)$ est donc géométrique, et son terme d'indice $n_0 \geq 1$ est non nul. Cela implique à la fois que le premier terme et que la raison de cette suite sont non nuls : il en est alors ainsi de tous les termes.

Ainsi, pour tout entier naturel n , le déterminant $\Delta(n, p-1)$ est non nul. [Q]

3. Pour entier n de \mathbb{N} , la matrice $M(n, p)$ (qui est carrée d'ordre $p+1$) est de rang p : en effet son déterminant est nul, mais certains de ses déterminants extraits d'ordre p sont non nuls (par exemple $\Delta(n+1, p-1)$ qui est le mineur du coefficient d'indice $(1, 1)$.)

En utilisant la partie I, on en déduit que la comatrice de $M(n, p)$ est de rang 1.

Le premier coefficient de la première ligne de $\text{Com } M(n, p)$ est $\Delta(n+1, p-1)$, qui est non nul.

Le dernier coefficient de la dernière ligne de $\text{Com } M(n, p)$ est $\Delta(n, p-1)$, qui est non nul.

La première et la dernière lignes de $\text{Com } M(n, p)$ sont donc non identiquement nulles.

[Q]

4. Soit k un entier compris entre 1 et n .

Les deux matrices suivantes sont carrées d'ordre $p+1$:

$$M(k, p) = \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & u_{k+p} & \cdots & u_{k+2p-1} \\ u_{k+p} & u_{k+p+1} & \cdots & u_{k+2p} \end{pmatrix}$$

$$M(k-1, p) = \begin{pmatrix} u_{k-1} & u_k & \cdots & u_{k+p-1} \\ u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & u_{k+p} & \cdots & u_{k+2p-1} \end{pmatrix}$$

On voit que les lignes $1, 2, \dots, p$ de $M(k, p)$ sont les lignes $2, 3, \dots, p+1$ de $M(k-1, p)$. Ainsi pour tout j de $\{1, \dots, p+1\}$, le mineur d'indice $(p+1, j)$ de $M(k, p)$ est égal au mineur d'indice $(1, j)$ de $M(k-1, p)$.

On passe des mineurs aux cofacteurs en multipliant par $(-1)^i$, où i est l'indice de ligne. Pour tout j de $\{1, \dots, p+1\}$, le cofacteur d'indice $(p+1, j)$ de $M(k, p)$ est donc égal au produit par $(-1)^p$ du cofacteur d'indice $(1, j)$ de $M(k-1, p)$.

Autrement dit : la dernière ligne de $\text{Com } M(k, p)$ est égale au produit par $(-1)^p$ de la première ligne de $\text{Com } M(k-1, p)$. [Q]

5. Pour tout entier naturel k , la matrice $\text{Com } M(k, p)$ est de rang 1. En particulier sa première et sa dernière ligne sont proportionnelles. Mais on sait que ces deux lignes sont non nulles.

Ainsi la première ligne de $\text{Com } M(k, p)$ est un multiple *non nul* de la dernière ligne de $\text{Com } M(k, p)$, elle-même égale ou opposée à la première ligne de $\text{Com } M(k-1, p)$ si $k \geq 1$. Par une récurrence finie descendante, on voit donc que la première ligne de $\text{Com } M(n, p)$ est un multiple non nul de la première ligne de $\text{Com } M(0, p)$, qui est elle-même un multiple non nul de la dernière ligne de $\text{Com } M(0, p)$: c'est ce qu'il fallait démontrer. [Q]

6. Notons $A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,p+1}$ les cofacteurs des coefficients de la première ligne de $M(n, p)$: ils forment la première ligne de $\text{Com } M(n, p)$.

Le développement de $\Delta(n, p)$ (dont la valeur est 0) par rapport à la première ligne s'écrit :

$$A_{1,1}u_n + A_{1,2}u_{n+1} + \dots + A_{1,p+1}u_{n+p} = 0$$

Mais on sait que la première ligne $(A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,p+1})$ de $\text{Com } M(n, p)$ est un multiple par un coefficient λ non nul de la dernière ligne de $\text{Com } M(0, p)$, que nous noterons ici (a_0, a_1, \dots, a_p) .

L'égalité précédente s'écrit donc (après simplification par λ) :

$$a_0u_n + a_1u_{n+1} + \dots + a_pu_{n+p} = 0$$

L'intérêt de ce résultat est que les coefficients a_0, a_1, \dots, a_p ne dépendent pas de n . L'égalité précédente traduit donc une relation de récurrence (indépendante de n), linéaire et "de pas $p+1$ " c'est-à-dire reliant $p+1$ termes successifs quelconques de la suite (u) .

Il reste à vérifier que cette relation est réellement de pas $p+1$, ce qui revient à prouver que les coefficients extrêmes a_0 et a_p sont non nuls.

En effet la matrice $M(0, p)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{p-1} & u_p & \dots & u_{2p-1} \\ u_p & u_{p+1} & \dots & u_{2p} \end{pmatrix}$$

On en déduit $a_0 = (-1)^p \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_p & \dots & u_{2p-1} \end{vmatrix}$ et $a_p = (-1)^p \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{p-1} & \dots & u_{2p-2} \end{vmatrix}$

Ainsi $a_0 = (-1)^p \Delta_{1,p-1}$ et $a_p = (-1)^p \Delta_{0,p-1}$: ces coefficients sont donc non nuls. [Q]

Partie IV

1. Par hypothèse, on a donc $\Delta(n, 2) = 0$, pour tout entier naturel n .

On remarque d'autre part que $\Delta(1, 1) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

On est donc dans les conditions du début de la partie III : il existe trois coefficients a_0, a_1, a_2 , avec $a_0 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$ tels que, pour tout entier n : $a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + a_2 u_{n+2} = 0$. En divisant par a_2 , on voit qu'il existe α, β tels que, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$.

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on trouve $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ 3\alpha + \beta = 4 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Donc les suites cherchées vérifient, pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$.

Réciproquement, si une telle relation est vérifiée pour tout n , alors les $\Delta(n, 2)$ sont nuls.

L'équation caractéristique est $t^2 - t - 1 = 0$ et ses racines sont $r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Il existe donc λ et μ tels que, pour tout n : $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$.

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda r + \mu s = 1 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$, puis $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$.

Conclusion : Il existe une suite unique (u_n) satisfaisant aux hypothèses indiquées.

Elle est définie par $u_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$. [Q]

2. On constate que $D(n, p) = \Delta(n, p)$, avec $u_n = n^2$.

Cette suite vérifie :

$u_{n+3} - u_n = (n+3)^2 - n^2 = 3(2n+3)$, et $u_{n+2} - u_{n+1} = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3$.

Elle satisfait donc à la relation de récurrence linéaire : $u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n = 0$.

Cette suite est donc dans \mathcal{S}_p pour tout $p \geq 2$.

Les déterminants $D(n, p)$ sont donc nuls si $p \geq 2$.

Enfin $D(n, 0) = n^2$ et $D(n, 1) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 \end{vmatrix} = -(2n^2 + 4n + 1)$.

Remarque : il n'est pas vraiment nécessaire d'avoir fait tout ce qui précède pour comprendre pourquoi le déterminant $D(n, p)$ est nul quand $p \geq 2$.

En effet, les colonnes de $D(n, p)$ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} (n+j)^2 \\ (n+1+j)^2 \\ \vdots \\ (n+p+j)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2 \\ (n+1)^2 \\ \vdots \\ (n+p)^2 \end{pmatrix} + 2j \begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ \vdots \\ n+p \end{pmatrix} + j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de $D(n, p)$, qui sont donc combinaisons linéaires de trois colonnes constantes, sont nécessairement liées si l'ordre du $p+1$ du déterminant est au moins égal à 3.

On retrouve ainsi que le déterminant $D(n, p)$ est nul quand $p \geq 2$. [Q]