Période du pendule simple

D'après le concours Centrale-Supélec 1998, première épreuve, filière TSI

Le but du problème est la définition et l'étude de certaines fonctions.

Cette étude est suivie d'une application relative au pendule simple.

Notations

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- Si f est une fonction réelle de la variable réelle, f^2 désigne la fonction : $x \mapsto f(x)^2$.
- $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ désigne l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, où n et p sont deux entiers naturels non nuls.
- k désigne un élément fixé de l'intervalle $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaire

1. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivante :

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)$$

   Démontrer que ϕ est bijective et définir son application réciproque ϕ^{-1}.

2. Pour toute application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on note g la composée $f \circ \phi$.

   (a) Démontrer que f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ si et seulement si g y est également.

   (b) On suppose que f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
   Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ de g en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   (c) En déduire l'ensemble E suivant : $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \right\}$.

3. Démontrer que si f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = f(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

   alors il existe α dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \alpha(x + y)$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie II

1. **Définition d'une certaine bijection**

   (a) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ existe pour tout x de $[0,1]$.

   (b) On note désormais, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, $\mathrm{ArcS}\,(x)$ cette intégrale. Démontrer qu'on définit ainsi une bijection ArcS de $[0,1]$ sur $[0,\mathrm{ArcS}\,(1)]$.

2. **Étude de la dérivabilité de la bijection réciproque et de deux autres fonctions**

   On note S la bijection réciproque de ArcS.

   On pose $\mathrm{C}=\sqrt{1-\mathrm{S}^2}$ et $\mathrm{D}=\sqrt{1-k^2\mathrm{S}^2}$. On note T le réel $\mathrm{ArcS}\,(1)$.

   (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,T]$ et que l'on a : $\mathrm{S}'=\mathrm{CD}$.

   (b) Étudier la dérivabilité de D et C, et exprimer leurs dérivées à l'aide de S, C et D.

3. **Définition des fonctions s, c et d**

   (a) Démontrer qu'il existe une unique fonction impaire s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui soit $2T$-antipériodique ($\forall x\in\mathbb{R},\ s(x+2T)=-s(x)$), et telle que : $\forall x\in[0,T],\ s(x)=\mathrm{S}(x)$.

   (b) On définit de même les fonctions c et d par les propriétés suivantes :
   - c est paire, $2T$-antipériodique, et : $\forall x\in[0,T],\ c(x)=\mathrm{C}(x)$.
   - d est paire, $2T$-périodique, et : $\forall x\in[0,T],\ d(x)=\mathrm{D}(x)$

   On ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité des fonctions c et d.
   Démontrer les relations suivantes : $1-s^2=c^2$ et $1-k^2s^2=d^2$.

   (c) Reconnaître les fonctions s, c et d dans le cas particulier $k=0$.
   Dans toute la suite du problème on suppose k dans $]0,1]$.

4. **Dérivabilité de s, c et d**

   (a) Montrer que s,c,d sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Exprimer s',c',d' à l'aide de s,c,d.

   (b) Démontrer que s, c et d sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 de s, c et d.

6. **Formules d'addition et quelques valeurs prises par s, c et d**

   (a) Démontrer que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ s(x+y)=\dfrac{s(x)(cd)(y)+s(y)(cd)(x)}{1-k^2s^2(x)s^2(y)}$

   On établit de même (et on l'admettra) que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

   $$c(x+y)=\frac{c(x)c(y)-(sd)(x)(sd)(y)}{1-k^2s^2(x)s^2(y)}\quad\text{et}\quad d(x+y)=\frac{d(x)d(y)-k^2(sc)(x)(sc)(y)}{1-k^2s^2(x)s^2(y)}$$

   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, calculer $s(T-x),c(T-x),d(T-x)$ à l'aide de $s(x),c(x),d(x)$.
   En déduire les réels $d(T/2),s(T/2),c(T/2)$ en fonction de $k'=\sqrt{1-k^2}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie III

Dans cette partie on écrit T comme la somme d'une série et on en déduit une méthode de calcul de la période du pendule simple.

1. **Calcul d'une intégrale**

   On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

   Établir une relation entre w_{n+2} et w_n et en déduire une expression, pour tout n de $\mathbb{N}$, de w_{2n} à l'aide de factorielles, d'une puissance de 2 et du nombre π.

2. **Une nouvelle expression de T**

   (a) Démontrer que : $T = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$.

   (b) En déduire : $T = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n} k^{2n} \sin^{2n} \theta \Big) \, \mathrm{d}\theta$

   (c) En admettant qu'on peut intégrer terme à terme l'expression précédente, démontrer que : $T = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n k^{2n}$, où les a_n sont des rationnels à préciser.

3. **Période du pendule simple**

   On démontre en physique que dans un système d'unités bien choisi la période $P(\theta_0)$ du pendule simple est donnée par l'expression ci-dessous, où θ_0 est une constante fixée dans $]0, \pi[$ et dépendant des conditions initiales du mouvement du pendule :

   $$P(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

   (a) Justifier l'existence de l'intégrale donnant $P(\theta_0)$.

   (b) Démontrer, à l'aide du changement de variable $u = \sin\dfrac{\theta}{2} / \sin\dfrac{\theta_0}{2}$, que $P(\theta_0)$ est le nombre T obtenu quand on choisit $k = \sin\dfrac{\theta_0}{2}$.

   (c) On pose : $u_n(\theta_0) = \dfrac{(2n)!^2}{2^{4n}\, n!^4} \sin^{2n}\dfrac{\theta_0}{2}$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}(\theta_0)}{u_n(\theta_0)} \leq \sin^2\dfrac{\theta_0}{2}$.

   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j(\theta_0) \leq u_n(\theta_0) \tan^2\frac{\theta_0}{2}$.

   (d) Soit ε un réel strictement positif. Déduire de ce qui précède une méthode de calcul d'une valeur approchée à ε près de la période du pendule simple, θ_0 étant supposé connu. Donner la valeur obtenue pour $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$.

   (e) Calculer la limite de $P(\theta_0)$ quand θ_0 tend vers 0.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021