

## Période du pendule simple

D'après le concours Centrale-Supélec 1998, première épreuve, filière TSI

Le but du problème est la définition et l'étude de certaines fonctions.

Cette étude est suivie d'une application relative au pendule simple.

### Notations

- $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.
- Si  $f$  est une fonction réelle de la variable réelle,  $f^2$  désigne la fonction :  $x \mapsto f(x)^2$ .
- $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  désigne l'ensemble des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels non nuls.
- $k$  désigne un élément fixé de l'intervalle  $[0, 1[$  de  $\mathbb{R}$ .

### Partie I - Préliminaire

1. Soit l'application  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  suivante :

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v) \right)$$

Démontrer que  $\phi$  est bijective et définir son application réciproque  $\phi^{-1}$ .

2. Pour toute application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , on note  $g$  la composée  $f \circ \phi$ .

(a) Démontrer que  $f$  est dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  si et seulement si  $g$  y est également.

(b) On suppose que  $f$  est dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Exprimer les dérivées partielles  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v}$  de  $g$  en fonction de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

(c) En déduire l'ensemble  $E$  suivant :  $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$ .

3. Démontrer que si  $f$  est dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

alors il existe  $\alpha$  dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \alpha(x + y)$$

## Partie II

### 1. Définition d'une certaine bijection

- (a) Démontrer que l'intégrale  $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$  existe pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ .
- (b) On note désormais, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $\text{ArcS}(x)$  cette intégrale. Démontrer qu'on définit ainsi une bijection  $\text{ArcS}$  de  $[0, 1]$  sur  $[0, \text{ArcS}(1)]$ .

### 2. Étude de la dérivabilité de la bijection réciproque et de deux autres fonctions

On note  $S$  la bijection réciproque de  $\text{ArcS}$ .

On pose  $C = \sqrt{1-S^2}$  et  $D = \sqrt{1-k^2S^2}$ . On note  $T$  le réel  $\text{ArcS}(1)$ .

- (a) Démontrer que  $S$  est dérivable sur  $[0, T]$  et que l'on a :  $S' = CD$ .
- (b) Étudier la dérivabilité de  $D$  et  $C$ , et exprimer leurs dérivées à l'aide de  $S$ ,  $C$  et  $D$ .

### 3. Définition des fonctions $s$ , $c$ et $d$

- (a) Démontrer qu'il existe une unique fonction impaire  $s$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , qui soit  $2T$ -antipériodique ( $\forall x \in \mathbb{R}, s(x+2T) = -s(x)$ ), et telle que :  $\forall x \in [0, T], s(x) = S(x)$ .
- (b) On définit de même les fonctions  $c$  et  $d$  par les propriétés suivantes :
- $c$  est paire,  $2T$ -antipériodique, et :  $\forall x \in [0, T], c(x) = C(x)$ .
  - $d$  est paire,  $2T$ -périodique, et :  $\forall x \in [0, T], d(x) = D(x)$

On ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité des fonctions  $c$  et  $d$ .

Démontrer les relations suivantes :  $1 - s^2 = c^2$  et  $1 - k^2s^2 = d^2$ .

- (c) Reconnaître les fonctions  $s$ ,  $c$  et  $d$  dans le cas particulier  $k = 0$ .  
Dans toute la suite du problème on suppose  $k$  dans  $]0, 1[$ .

### 4. Dérivabilité de $s$ , $c$ et $d$

- (a) Montrer que  $s, c, d$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Exprimer  $s', c', d'$  à l'aide de  $s, c, d$ .
- (b) Démontrer que  $s, c$  et  $d$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 5. Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $s, c$ et $d$ .

### 6. Formules d'addition et quelques valeurs prises par $s, c$ et $d$

- (a) Démontrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, s(x+y) = \frac{s(x)(cd)(y) + s(y)(cd)(x)}{1 - k^2s^2(x)s^2(y)}$

On établit de même (et on l'admettra) que pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$c(x+y) = \frac{c(x)c(y) - (sd)(x)(sd)(y)}{1 - k^2s^2(x)s^2(y)} \quad \text{et} \quad d(x+y) = \frac{d(x)d(y) - k^2(sc)(x)(sc)(y)}{1 - k^2s^2(x)s^2(y)}$$

- (b) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , calculer  $s(T-x), c(T-x), d(T-x)$  à l'aide de  $s(x), c(x), d(x)$ .  
En déduire les réels  $d(T/2), s(T/2), c(T/2)$  en fonction de  $k' = \sqrt{1-k^2}$ .

### Partie III

Dans cette partie on écrit  $T$  comme la somme d'une série et on en déduit une méthode de calcul de la période du pendule simple.

#### 1. Calcul d'une intégrale

On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$ .

Établir une relation entre  $w_{n+2}$  et  $w_n$  et en déduire une expression, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , de  $w_{2n}$  à l'aide de factorielles, d'une puissance de 2 et du nombre  $\pi$ .

#### 2. Une nouvelle expression de $T$

(a) Démontrer que :  $T = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ .

(b) En déduire :  $T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n} k^{2n} \sin^{2n} \theta \right) d\theta$

(c) En admettant qu'on peut intégrer terme à terme l'expression précédente, démontrer que :  $T = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n k^{2n}$ , où les  $a_n$  sont des rationnels à préciser.

#### 3. Période du pendule simple

On démontre en physique que dans un système d'unités bien choisi la période  $P(\theta_0)$  du pendule simple est donnée par l'expression ci-dessous, où  $\theta_0$  est une constante fixée dans  $]0, \pi[$  et dépendant des conditions initiales du mouvement du pendule :

$$P(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

(a) Justifier l'existence de l'intégrale donnant  $P(\theta_0)$ .

(b) Démontrer, à l'aide du changement de variable  $u = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_0}{2}$ , que  $P(\theta_0)$  est le nombre  $T$  obtenu quand on choisit  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ .

(c) On pose :  $u_n(\theta_0) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^4} \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2}$ . Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}(\theta_0)}{u_n(\theta_0)} \leq \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$ .

En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j(\theta_0) \leq u_n(\theta_0) \tan^2 \frac{\theta_0}{2}$ .

(d) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Déduire de ce qui précède une méthode de calcul d'une valeur approchée à  $\varepsilon$  près de la période du pendule simple,  $\theta_0$  étant supposé connu. Donner la valeur obtenue pour  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

(e) Calculer la limite de  $P(\theta_0)$  quand  $\theta_0$  tend vers 0.