# Opérations sur des suites de carré sommable

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.

Un élément $u$ de $\mathcal{S}$ sera noté $u = (u_n)_{n\geq 1}$.

On note $\mathcal{S}_1$ le sous ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites $u$ telles que la série $\sum u_n$ soit convergente.

On note $\mathcal{S}_2$ le sous ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites $u$ telles que la série $\sum u_n^2$ soit convergente.

Pour tout élément $u = (u_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}$, on note :
- $\Delta(u)$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour $n \geq 1$.
- $\nabla(u)$ la suite définie par $w_1 = v_1$ et $w_n = v_n - v_{n-1}$ si $n \geq 2$.
  On constate que pour tout $n \geq 2$, $w_n = (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$.

Pour tout élément $u$ de $\mathcal{S}_2$, on note $\sigma(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_1$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_2$, et que $\mathcal{S}_2$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_1$. [S]
2. Montrer que $\mathcal{S}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. [S]
3. (a) Montrer que si les suites $u, v$ sont dans $\mathcal{S}_2$, alors la suite $p$ de terme général $p_n = u_n\, v_n$ est dans $\mathcal{S}_1$. [S]
   (b) En déduire que $\mathcal{S}_2$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. [S]
   (c) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}_2$ en posant $< u, v >= \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$. [S]
4. Montrer que les restrictions de $\Delta$ et de $\nabla$ à $\mathcal{S}_2$ sont des endomorphismes de $\mathcal{S}_2$.
   Pour toute suite $u$ de $\mathcal{S}_2$, on notera $J_0(u) = \sigma(u)$, $J_1(u) = \sigma(\Delta(u))$ et $J_2(u) = \sigma(\nabla(u))$. [S]
5. On considère la suite $u$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.
   (a) Rappeler la valeur de $J_0(u)$. [S]
   (b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$. En déduire $J_1(u) = \dfrac{\pi^2}{3} - 3$. [S]
   (c) Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{3}{4}$. En déduire $J_2(u) = \pi^2 - \dfrac{19}{2}$. [S]
   (d) Contrôler qu'on a bien l'inégalité $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$. [S]
6. Dans cette question, on va déterminer les valeurs propres de la restriction de $\Delta$ à $\mathcal{S}_2$, et les vecteurs propres associés.
   (a) Soit $u$ un élément de $\mathcal{S}_2$, vecteur propre de $\Delta$ pour une valeur propre $\lambda$ (autrement dit : $u$ n'est pas la suite nulle et $\Delta(u) = \lambda u$.)
   Montrer que $-2 < \lambda < 0$ et que $u$ est une suite géométrique de raison $\lambda + 1$. [S]
   (b) Etablir la réciproque. En déduire le spectre de la restriction de $\Delta$ à $\mathcal{S}_2$. [S]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

(c) Soit $u$ un élément de $\mathcal{S}_2$, vecteur propre de $\Delta$ pour une valeur propre $\lambda$.
Calculer $J_0(u)$, $J_1(u)$, $J_2(u)$, et vérifier l'inégalité $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$. [S]

7. Soient $u$ un élément $\mathcal{S}_2$. On note $v = \Delta(u)$ et $w = \nabla(u)$. Montrer que $J_1(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, w_n$. [S]

8. Soit $u$ un élément quelconque de $\mathcal{S}_2$.

(a) En utilisant la question précédente, montrer l'inégalité $2J_1(u) \leq J_0(u) + J_2(u)$. [S]

(b) Existe-t-il des suites de $\mathcal{S}_2$ qui satisfont à l'égalité $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$ ? [S]

9. Soit $u$ un élément quelconque de $\mathcal{S}_2$. Montrer que $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$. [S]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

# Corrigé du problème

1. – La suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est dans $\mathcal{S}_1$ mais pas dans $\mathcal{S}_2$.
En effet la série $\sum u_n$ converge (grâce au critère spécial des séries alternées) mais la série $\sum u_n^2$ diverge (c'est la série harmonique).
L'ensemble $\mathcal{S}_1$ n'est donc pas inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}_2$.
– La suite $u = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est dans $\mathcal{S}_2$ mais pas dans $\mathcal{S}_1$, car $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge mais pas $\sum \dfrac{1}{n}$.
L'ensemble $\mathcal{S}_2$ n'est donc pas inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}_1$.
[Q]
2. $\mathcal{S}_1$ est de manière évidente non vide (la suite nulle est dans $\mathcal{S}_1$) et stable par combinaisons linéaires : si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, il en est de même des séries $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$.
$\mathcal{S}_1$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. [Q]
3. (a) Pour tout entier $N$, Cauchy-Schwarz permet d'écrire :
$$\left(\sum_{n=1}^{N} |u_n\, v_n|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2.$$
Par majoration des sommes partielles, on en déduit la convergence de la série de terme général $|u_n\, v_n|$, c'est-à-dire la convergence absolue de la série $\sum p_n$, ce qu'il fallait démontrer. [Q]
(b) On montre que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
La suite nulle est évidemment dans $\mathcal{S}_2$.
Soient $u, v$ deux éléments de $\mathcal{S}_2$, et soient $\lambda, \mu$ deux réels quelconques.
Les séries $\sum u_n^2$, $\sum v_n^2$ et $\sum u_n\, v_n$ sont convergentes (pour cette dernière, d'après la question précédente). On en déduit que la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ est convergente, ce qui prouve que $\lambda u + \mu v$ appartient à $\mathcal{S}_2$.
Conclusion : $\mathcal{S}_2$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. [Q]
(c) La question 2-a prouve l'existence de $< u, v >$, pour tous éléments $u$ et $v$ de $\mathcal{S}_2$.
L'application $(u, v) \mapsto < u, v >$ est de manière évidente bilinéaire et symétrique.
Il est clair aussi que $< u, u > = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ est $\geq 0$ et n'est nul que si la suite $u$ est nulle.
Conclusion : on a bien défini un produit scalaire sur $\mathcal{S}_2$. [Q]
4. Si $u$ est un élément de $\mathcal{S}_2$, c'est-à-dire si la série $\sum u_n^2$ converge, alors les séries $\sum u_{n+1}^2$ et $\sum u_{n-1}^2$ convergent (il ne s'agit que d'une translation d'indice !).
Les suites $n \mapsto u_{n+1}$ et $n \mapsto u_{n-1}$ sont donc éléments de $\mathcal{S}_2$.
Puisque $\mathcal{S}_2$ est un espace vectoriel, la suite $\Delta(u)$ est un élément de $\mathcal{S}_2$.
De la même manière, la suite $\nabla(u)$ appartient à $\mathcal{S}_2$ (à un indice près, elle se déduit de la suite $\Delta(u)$ comme la suite $\Delta(u)$ se déduit de $u$.)
L'ensemble $\mathcal{S}_2$ est donc stable par les applications $\Delta$ et $\nabla$.
Enfin la linéarité de $\Delta$ et de $\nabla$ (et donc de leurs restrictions à $\mathcal{S}_2$) est évidente. [Q]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

5. (a) On sait bien sûr que $J_0(u)$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, est égal à $\dfrac{\pi^2}{6}$. [Q]

(b) Pour tout $N\geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{N+1}$.

Quand on fait tendre $N$ vers $+\infty$, on trouve : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Puisque $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v=\Delta(u)$ est définie par $v_n=u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$.

On trouve facilement :

$$\begin{aligned}J_1(u)&=\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\Big)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n(n+1)}\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\Big(\frac{\pi^2}{6}-1\Big)+\frac{\pi^2}{6}-2=\frac{\pi^2}{3}-3.\end{aligned}$$ [Q]

(c) Pour tout entier $N\geq 2$ :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)}&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\Big)\end{aligned}$$

Quand on fait tendre $N$ vers $+\infty$, on trouve : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\frac{3}{4}$.

Notons $w$ la suite $\nabla(u)$.

On a $w_1=v_1=u_2-u_1=-\dfrac{1}{2}$ et, $\forall n\geq 2$, $w_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n-1}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}J_2(u)&=\sum_{n=1}^{\infty}w_n^2=\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n-1}\Big)^2\\&=\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{4}{(n+1)n}-\frac{4}{n(n-1)}+\frac{2}{(n+1)(n-1)}\Big)\\&=\frac{1}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}\\&\qquad-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}\\&=\frac{1}{4}+\Big(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\Big)+4\Big(\frac{\pi^2}{6}-1\Big)+\frac{\pi^2}{6}-4\Big(1-\frac{1}{2}\Big)-4+2\cdot\frac{3}{4}=\pi^2-\frac{19}{2}.\end{aligned}$$ [Q]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

(d) On constate que :

$$J_0(u)J_2(u) - J_1(u)^2 = \frac{\pi^2}{6}\left(\pi^2 - \frac{19}{2}\right) - \left(\frac{\pi^2}{3} - 3\right)^2 = \frac{\pi^4}{18} + \frac{5\pi^2}{12} - 9 \approx 0.524 > 0$$

On a donc bien vérifié l'inégalité : $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$. [Q]

6. (a) Par hypothèse, et pour tout entier $n \geq 1$ : $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$.
On en déduit $u_{n+1} = (\lambda+1)u_n$ et donc, pour tout $n \geq 1$ : $u_n = (\lambda+1)^{n-1}\,u_1$.
Autrement dit, la suite $u$ est géométrique de raison $\lambda + 1$.
Mais par hypothèse, la série $\sum u_n^2$ est convergente.
Cela exige $|\lambda + 1| < 1$, c'est-à-dire $-2 < \lambda < 0$. [Q]

(b) Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$, avec $|q| < 1$.
De cette manière la suite $u$ est dans $\mathcal{S}_2$.
Pour tout $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$. Ainsi $\Delta(u) = (q-1)u$.
La suite $u$ (qui n'est pas nulle si on choisit $u_1 \neq 0$) est donc vecteur propre de $\Delta$ pour la valeur propre $q - 1$ (elle même élément de $]-2, 0[$.)
Conclusion : le spectre de la restriction de $\Delta$ à $\mathcal{S}_2$ est $]-2, 0[$. Pour chaque valeur propre $\lambda$, le sous-espace propre est l'ensemble des suites géométriques de raison $\lambda+1$ (c'est une droite vectorielle, engendrée par la suite de terme général $(\lambda+1)^n$.) [Q]

(c) – On sait que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = (\lambda+1)^{n-1}u_1$, avec $u_1 \neq 0$.
On en déduit $J_0(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = u_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)^{2n} = u_1^2 \frac{1}{1-(\lambda+1)^2} = -u_1^2 \frac{1}{\lambda(\lambda+2)}$.

– On sait que $v = \Delta(u) = \lambda u$.
On en déduit $J_1(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \lambda^2 J_0(u) = -u_1^2 \frac{\lambda}{\lambda+2}$.

– Notons $w = \nabla(u)$. Par définition $w_1 = v_1 = \lambda u_1$.
D'autre part, pour tout $n \geq 2$, $w_n = v_n - v_{n-1} = \lambda(u_n - u_{n-1}) = \lambda v_{n-1} = \lambda^2 u_{n-1}$.
On en déduit $J_2(u) = \lambda^2 u_1^2 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} w_n^2 = \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1}^2 = \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 J_0(u)$.
Ainsi $J_2(u) = \lambda^2 u_1^2 - \lambda^3 u_1^2 \dfrac{1}{\lambda+2} = u_1^2 \dfrac{2\lambda^2}{\lambda+2}$.

– On constate que $J_1(u)^2 - J_0(u)J_2(u) = \dfrac{\lambda^2 u_1^4}{(\lambda+2)^2} + \dfrac{u_1^2}{\lambda(\lambda+2)} \dfrac{2\lambda^2 u_1^2}{\lambda+2} = u_1^4 \dfrac{\lambda}{\lambda+2}$.
Cette quantité est négative car $\lambda \in ]-2, 0[$.
On a donc l'inégalité $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$.
[Q]

7. On sait que la suite $w$ est dans $\mathcal{S}_2$ (voir question 4.)
D'après la question 3-a, cela implique la convergence de la série $\sum u_n\,w_n$.
Dans le calcul suivant, toutes les séries sont convergentes :


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, w_n \;= u_1 w_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n\,(v_n - v_{n-1}) = u_1 v_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n\, v_n - \sum_{n=2}^{\infty} u_n\, v_{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, v_n - \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}\, v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})\, v_n = -\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = -J_1(u).$$ [Q]

8. (a) Il suffit d'évaluer la différence et d'utiliser le résultat précédent.

$$J_0(u) + J_2(u) - 2J_1(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)^2 \geq 0$$

On a donc démontré l'inégalité $2J_1(u) \leq J_0(u) + J_2(u)$. [Q]

(b) Notons que la suite nulle convient. Nous allons vérifier que c'est la seule.
On suppose donc que $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$.

Comme cela résulte de la question précédente, on a $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)^2 = 0$.

Autrement dit, et pour tout $n \geq 1$, $u_n + w_n = 0$.
Or $w_1 = v_1 = u_2 - u_1$. On en déduit $u_2 = 0$.
D'autre part, pour tout $n \geq 2$, on a $w_n + u_n = u_{n+1} - u_n + u_{n-1}$.
La suite $u$ satisfait donc à une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $t^2 - t + 1 = 0$, dont une racine complexe est $t = \exp\dfrac{i\pi}{3}$.
On en déduit l'existence de scalaires $\alpha, \beta$ tels que, $\forall n \geq 1, u_n = \alpha \cos\dfrac{n\pi}{3} + \beta \sin\dfrac{n\pi}{3}$.
Ainsi la suite $u$ est périodique. Mais pour qu'elle soit élément de $\mathcal{S}_2$, il faut au moins qu'elle converge vers 0 : cela n'est possible que si $u$ est la suite nulle.
Conclusion :
La seule suite $u$ de $\mathcal{S}_2$ qui vérifie l'égalité $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$ est la suite nulle. [Q]

9. D'après la question (a), on peut écrire $J_1(u)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n\right)^2$.

Or pour tout entier $N$, et grâce à Cauchy-Schwarz $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n w_n\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \sum_{n=1}^{N} w_n^2$.

En faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on trouve : $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2$.

On a donc prouvé l'inégalité : $J_1(u)^2 \leq J_0(u) J_2(u)$. [Q]


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021