# Dérivation et intégration

## Sommaire



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# I Dérivabilité d'une fonction vectorielle

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$ (comme d'habitude, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

## I.1 Dérivabilité en un point

**Définition** *(Vecteur dérivé en un point)*

On dit que $f$ est *dérivable* en un point $a$ de $I$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $E$.

Cette limite est appelée *vecteur dérivé* de $f$ en $a$ et est notée $f'(a)$.

**Définitions complémentaires**

– *Vecteur dérivée à gauche*

Soit $a$ un point de $I$, distinct de l'extrémité gauche de $I$.

On dit que $f$ est dérivable à gauche en $a$ si $\lim\limits_{x \to a, x < a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $E$.

Cette limite est appelée vecteur dérivé à gauche de $f$ en $a$ et est notée $f'_g(a)$.

– *Vecteur dérivée à droite*

Soit $a$ un point de $I$, distinct de l'extrémité droite de $I$.

On dit que $f$ est dérivable à droite en $a$ si $\lim\limits_{x \to a, x > a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $E$.

Cette limite est appelée vecteur dérivé à droite de $f$ en $a$ et est notée $f'_d(a)$.

**Proposition** *(Une autre définition de la dérivabilité)*

L'application $f$ est dérivable en un point $a$ de $I$ $\Leftrightarrow$ il existe :
◇ Un vecteur $\ell$ de $E$
◇ Une application $x \mapsto \varepsilon(x)$ de $I$ dans $E$, vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(a) = 0$
tels que pour tout $x$ de $I$ : $f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$.
Le vecteur $\ell$ est alors égal à $f'(a)$.

**Propriétés immédiates**

– $f$ est dérivable en $a$ $\Leftrightarrow$ elle est dérivable à gauche et à droite en $a$ et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

– Si $f$ dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$. La réciproque est fausse. De même, si $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $a$, elle est continue à gauche (resp. à droite) en $a$.

– La notion d'application dérivable et la valeur des vecteurs dérivés ne dépendent pas de la norme choisie sur $E$ car on a supposé que $E$ est de dimension finie : toutes les normes sur $E$ sont donc équivalentes.

## I.2 Dérivabilité sur un intervalle

**Définition**

On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout point de $I$.
L'application $f' : I \to E$ qui à tout $a$ associe $f'(a)$ est appelée *application dérivée* de $f$.
Cette application est également notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$.

**Définition** *(Applications de classe $\mathcal{C}^1$)*

On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable sur $I$ et si $f'$ est continue sur $I$.
On note $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

**Remarque**

Nombre des propriétés qui suivent pourraient être énoncées en termes de vecteurs dérivés en un point ou d'applications dérivables. Conformément au programme elles sont énoncées en termes d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

**Proposition** *(Dérivabilité des applications composantes)*

Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de $E$.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les composantes de $f$ : $\forall x \in I, f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.

$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow$ ses composantes $f_k$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

On a alors : $\forall x \in I, f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'_k(x) e_k$.

**Cas particuliers**

– Si $E = \mathbb{K}^n$ et si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, alors $f' = (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$.
– Supposons que $f$ soit à valeurs complexes, et notons $g = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f})$ et $h = \mathrm{Im}\,(f)$.
  Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow g$ et $h$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.
  On a alors $f' = g' + ih'$, ou encore $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(g) + i\mathrm{D}(g)$.
  De même $\bar{f} = g - ih$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, et $D(\bar{f}) = g' - ih' = \overline{D(f)}$.
– *Applications à valeurs matricielles*
  Soit $M$ une application de $I$ dans $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\forall x \in I, M(x) = (a_{i,j}(x))$.
  $M$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow$ les $np$ applications $x \mapsto a_{i,j}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.
  Dans ces conditions, $\forall x \in I, M'(x)$ est la matrice de terme général $a'_{i,j}(x)$.

**Proposition** *(Caractérisation des applications constantes)*

Toute application constante $f$ de $I$ dans $E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et son application dérivée $f'$ est l'application nulle.
Réciproquement, si $f$ est continue sur $I$, dérivable sur l'intérieur de $I$ et si $f'$ est l'application nulle, alors $f$ est constante sur $I$.

# II Applications de classe Ck

On rappelle que $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés $E, F, G$ sont de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## II.1 Opérations sur les applications de classe C1

**Proposition** *(Linéarité de la dérivation)*

$\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(I, E)$ des applications continues de $I$ dans $E$, lui-même un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}(I, E)$ de toutes les applications $I$ dans $E$.
$\forall f, g \in \mathcal{C}^1(I, E), \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

**Proposition** *(Composition par une application linéaire)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

Alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $F$, et $(uof)' = uof\,'$.

**Proposition** *(Composition par une application bilinéaire)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $g$ une application de $I$ dans $F$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $B$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$.

Alors l'application $h$ définie par $h(x) = B(f(x), g(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $G$.

De plus $h' = (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

**Cas particuliers**

- Si $E$ est une algèbre normée, et si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $E$, alors $h = fg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $h' = f'g + fg'$.

  Par récurrence, on vérifie alors que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ alors $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n$.

  Si de plus $E$ est commutative, alors pour tout entier $p$ : $(f^p)' = p\, f'\, f^{p-1}$.

  Le cas le plus courant est évidemment $E = \mathbb{K}$.

- Soient $f : I \to E$, et $\lambda : I \ \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

  Alors $g = \lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

- Si $f$, $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans $I$ et si $E$ est muni d'un produit scalaire, alors l'application $< f, g >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $< f, g >' = < f', g > + < f, g' >$.

- Si $E$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $E$, alors $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

**Proposition** *(Dérivée de l'inverse)*

Soit $g$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $\mathbb{K}$, ne s'annulant pas.

Alors $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

La formule $(g^m)' = mg'g^{m-l}$ est alors vraie pour tout entier relatif $m$.

Si $f :\ I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Proposition** *(Dérivée d'une fonction composée)*

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $J$ un intervalle contenant $\varphi(I)$ et non réduit à un point.

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $J$ dans $E$.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $E$ et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Autrement dit : $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$.

## II.2 Dérivées successives

**Définition** *(Applications $n$ fois dérivables sur un intervalle)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de $I$ dans $E$.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to E$ existe, on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur l'intervalle $I$, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée $n$-ième* de $f$ sur $I$.

L'application $f^{(n)}$ est parfois notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.

**Remarque** *(Vecteur dérivé $n$-ième en un point)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, $a$ un point de $I$ et $n$ un entier naturel. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable en $a$ si $f$ est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de $a$ et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en $a$.

On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *vecteur dérivé $n$-ième* de $f$ au point $a$ de $I$ (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur $I$ tout entier.)

**Définition** *(Applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, $k$ fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur $I$, on dit que $f$ est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur $I$.

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $E$.

On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $I$ si $f$ est $k$ fois dérivable sur $I$ pour tout entier naturel $k$ (c'est-à-dire en fait si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k$).

On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

**Remarque**

$\mathcal{C}^0(I,E)$ désigne l'ensemble des applications continues de $I$ dans $E$.

On a les inclusions $\mathcal{C}^0(I,E) \supset \mathcal{C}^1(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I,E)$.

De même on a : $\mathcal{C}^\infty(I,E) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,E)$.

## II.3 Opérations sur les applications de classe Ck

**Proposition** *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

$\mathcal{C}^k(I,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
L'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire de $\mathcal{C}^k(I,E)$ dans $\mathcal{C}^0(I,E)$.

**Proposition** *(Formule de Leibniz)*

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Soient $f$ et $g$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $\mathbb{K}$.

Alors $fg$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et : $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f^{(k)} g^{(n-k)}$.

**Remarques**

– Le résultat précédent implique que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'algèbre.
– "Leibniz" est encore valable si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $g$ est à valeurs dans $E$, ou si $f$ et $g$ sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée $E$.

**Proposition** *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.

**Proposition** *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit $\varphi$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $\varphi(I)$.
Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de $J$ dans $E$.
Alors l'application $f\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $E$.

## II.4 Difféomorphismes

**Définition** *($\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.
On dit qu'une application $f$ de $I$ dans $J$ est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* si $f$ est une bijection de $I$ sur $J$, et si les deux applications $f$ et $f^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

**Proposition** *(Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

$f$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $I$ sur $J = f(I) \Leftrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) \neq 0$.

## II.5 Applications de classe Ck par morceaux

**Définition**

Soit $f$ une application définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $E$.

Soit $k$ un entier naturel. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ *par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de $f$ à chaque sous-intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ et soit prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Dans ce cas, on dit que la subdivision $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ est *adaptée* à $f$.

**Remarques**

- Si $f$ est de de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$ alors ses dérivées successives, encore notées $f^j$ ou $D^j(f)$ avec $1 \leq j \leq k$, sont définies sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points.
- Si $I$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (et donc plus nécessairement un segment), l'application $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $I$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout sous-segment de $I$.
- On vérifie que l'ensemble $\mathcal{M}^k(I, E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $I$, à valeurs dans $E$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$.

**Proposition** *(Caractérisation des applications constantes)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, continue et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Alors $f$ est constante sur $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$ sur $I$.

(Cette propriété est surtout utile dans le sens $\Leftarrow$.)

# III Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans cette section $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

## III.1 Fonctions en escaliers

**Définition** *(Subdivisions)*

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.

L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.

On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

**Remarque**

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que $\sigma$ est *plus fine* que $\sigma'$ si le support de $\sigma$ contient celui de $\sigma'$.

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de $\sigma$ et de $\sigma'$ est plus fine que chacune des subdivisions $\sigma$ et $\sigma'$.

Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$, alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

**Définition** *(Applications en escaliers)*

Soit $f$ une application de $[a, b]$ dans $E$. On dit que $f$ est *en escaliers* s'il existe :
– Une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$,
– $n$ vecteurs $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de $E$,
tels que : $\forall k = 0, \ldots, n-1, \forall t \in ]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.

On dit alors que la subdivision $\sigma$ est *adaptée* à $f$.

**Remarques et notations**

– Si $\sigma$ est une subdivision adaptée à $f$, toute subvision plus fine que $\sigma$ est adaptée à $f$.
– On note $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
– Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
– Tout combinaison linéaire de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.
  $\mathcal{E}([a, b], E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], E)$.
– Si $E$ est une algèbre, notamment si $E = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}([a, b], E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a, b], E)$ : le produit de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.

## III.2 Intégrale des fonctions en escaliers

### Définition

Soient $f : I \to E$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n}$ une subdivision adaptée.
On suppose que : $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \forall t \in ]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
Le vecteur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)u_k$ est appelé *intégrale* de $f$ et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

### Propriétés

– L'intégrale de $f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée á $f$ choisie.

– Si $f$ est constante égale à $u$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = (b - a)u$.

– Si l'application $f$ est nulle sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points,alors elle est élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.

– L'application qui à $f$ associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{E}([a, b], E)$ dans $E$.

– Si $f$ appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$, alors l'application $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ est également en escaliers.
De plus on a l'inégalité : $\displaystyle\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \le \int_{[a,b]} \|f\|$.

– Si $f$ appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$ et si $c$ est un élément de $]a, b[$, alors les restrictions de $f$ à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escaliers et : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

– Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$.
Alors $u \circ f$ est en escaliers de $[a, b]$ dans $F$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

### Cas des applications à valeurs réelles

– Si $f$ appartient à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \ge 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \ge 0$.

– Si $f$, $g$ appartiennent à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \ge g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \ge \int_{[a,b]} g$.

### Remarque

Si $f$ est en escaliers de $[a, b]$ dans $E$, alors $\displaystyle\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \le (b - a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

## III.3 Définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

### Notation

On note $\mathcal{M}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a, b]$.
C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a, b], E)$ des applications bornées sur $E$.

**Proposition et définition** *(Intégrale sur $\mathcal{M}([a,b],E)$)*

Soit $f$ un élément de $\mathcal{M}([a,b],E)$.

On sait qu'il existe une suite $(\varphi_n)$ de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers l'application $f$.

Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n$ est convergente dans $E$.

On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$. Cette quantité est appelée intégrale de $f$ sur $[a,b]$

**Remarques**

- La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)$ de fonctions en escaliers utilisée pour approcher $f$.
- Elle ne dépend pas non plus de la norme choisie sur $E$ (on rappelle que $E$ est supposé être de dimension finie : toutes les normes sur $E$ sont donc équivalentes.)
- Si l'application $f$ est en escaliers sur $[a,b]$ elle est continue par morceaux.
  L'intégrale de $f$ est évidemment la même selon les deux points de vue.
- Si $f$ est à valeurs réelles, la suite $(\varphi_n)$ peut être choisie telle que pour tout $n$, $\varphi_n \le f$ sur $[a,b]$ (ou telle que pour tout $n$, $\varphi_n \ge f$ sur $[a,b]$.)

  Si $f$ est à valeurs réelles positives, la suite $(\varphi_n)$ peut être choisie telle que les $\varphi_n$ soient elles aussi à valeurs positives sur $[a,b]$.

**Proposition** *(Invariance de l'intégrale par translation)*

Soit $f$ une application de $I = [a,b]$ dans $E$, continue par morceaux.

Soit $\alpha$ un nombre réel.

On définit l'application $g$ de $J = [a+\alpha, b+\alpha]$ dans $E$ par $g(t) = f(t-\alpha)$.

Alors $g$ est continue par morceaux sur $J$ et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

## III.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Elles découlent de celles de $\mathcal{E}([a,b],E)$ par passage à la limite.

- **Linéarité**
  L'application qui à $f$ associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{M}([a,b],E)$ dans $E$.
- **Extension aux applications définies "presque partout"**
  Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si $g$ ne diffère de $f$ qu'en un nombre fini de points, alors $g$ est encore continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

  En particulier si $f$ est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, et si la restriction de $f$ à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité à $[x_k, x_{k+1}]$ alors on peut encore définir l'intégrale de $f$, en donnant éventuellement à $f$ une valeur quelconque en chacun des $x_k$.

– **Composition par une application linéaire**
Soit $f : [a, b] \to E$, continue par morceaux. Soit $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$.
L'application $u \circ f$ appartient à $\mathcal{M}([a, b], F)$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

– **Intégrale et composantes dans une base**
Soit $f$ une application de $[a, b]$ dans $E$ muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
On note $f_1, \ldots, f_n$ ses composantes : $\forall x \in [a, b], f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, e_k$.
$f$ est continue par morceaux $\Leftrightarrow$ les composantes $f_k$ sont continues par morceaux.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{[a,b]} f_k\right) e_k$.
En particulier, si $E = \mathbb{C}$ et si $f = g + ih$ : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g + i\int_{[a,b]} h$.
Autrement dit : $\displaystyle\mathrm{Re}\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f$, et $\displaystyle\mathrm{Im}\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$

– **Intégrale de la norme**
Si $f$ appartient à $\mathcal{M}([a, b], E)$, alors l'application $\|f\|$, à valeurs réelles et définie sur $[a, b]$ par $t \mapsto \|f(t)\|$, est également continue par morceaux.
De plus on a l'inégalité : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \le \int_{[a,b]} \|f\|$.

## III.5 Positivité et croissance de l'intégrale pour les fonctions réelles

On rappelle que le segment $[a, b]$ est tel que $a < b$.

**Proposition** *(Positivité et croissance de l'intégrale)*

Soient $f$ et $g$ deux applications continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
- Si $f \ge 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \ge 0$.
- Si $f \ge g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \ge \int_{[a,b]} g$.
- On suppose que $f$ garde un signe constant sur $[a, b]$ et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
  - ⋄ Si $f$ est continue en un point $x_0$ de $[a, b]$, alors $f(x_0) = 0$.
  - ⋄ En particulier, si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors $f$ est identiquement nulle.

**Remarques**

- Le résultat précédent peut s'énoncer, en supposant $f \geq 0$ sur $[a,b]$ :

  Si $f$ est continue en un point $x_0$ de $[a,b]$ et si $f(x) > 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$. En particulier, si $f$ est continue $\geq 0$ mais non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
- Si $f$ et $g$ sont continues, si $f \leq g$ sur $[a,b]$ et si $f \neq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

**Proposition** *(Inégalité de la moyenne)*

Soit $f$ une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $E$.

Alors $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

## III.6 Extension de la définition et notation définitive

**Notation**

Soit $f$ une application continue par morceaux de $I$ dans $E$.

Pour tous points $a$, $b$ de $I$, on note :

Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$ ; Si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$ ; Si $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

**Remarques**

- On dispose maintenant de la notation $\displaystyle\int_a^b f$, pour deux points quelconques $a$ et $b$ d'un intervalle $I$ sur lequel $f$ est continue par morceaux. On vérifie que $\forall (a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- Les propriétés précédentes, relatives à la linéarité ou aux composantes, restent valables.
- En revanche, les propriétés relatives à la positivité et à la croissance dépendent de la position respective des bornes de l'intégrale.
- L'inégalité de la moyenne devient : $\forall (a,b) \in I^2$, $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq |b-a|\sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.
- Si $f$ est continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $E$, et si $a, b, c$ sont trois points quelconques de $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *(Relation de Chasles.)*

  On peut généraliser à une suite finie $c_1, \ldots, c_n$ de points de $I$ : $\displaystyle\int_{c_1}^{c_n} f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$.

**Notation**

On note souvent $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ plutôt que $\displaystyle\int_a^b f$. Dans cette notation $t$ est une variable *muette*.

## III.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

### Proposition

Soient $f$ et $g$ deux applications continues par morceaux de $I$ dans $\mathbb{K}$.

Alors pour tous points $a$ et $b$ de $I$ : $\left|\displaystyle\int_a^b f\,\bar{g}\right|^2 \leq \displaystyle\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$.

En particulier, si $f$ $g$ sont à valeurs réelles : $\left(\displaystyle\int_a^b f\,g\right)^2 \leq \displaystyle\int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Si $f$ et $g$ sont continues sur le segment $[a, b]$, les inégalités précédentes sont des égalités $\Leftrightarrow f$ et $g$ sont proportionnelles sur $[a, b]$.

# IV Primitives et intégrales

Dans cette section, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## IV.1 Primitives

### Définition

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $E$.
On dit qu'une application $F : I \to E$ est une *primitive* de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et si, pour tout $x$ de $I$ : $F'(x) = f(x)$.

### Extension de la définition

On suppose seulement que $f : I \to E$ est continue par morceaux.

Une primitive de $f$ est alors toute application $F : I \to E$, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de $f$.

### Propriétés

- Soit $f$ une application continue par morceaux de $I$ dans $E$ admettant une primitive $F$.

  Soit $G$ une application de $I$ dans $E$. $G$ est une primitive de $f$ sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante $\lambda$ telle que, pour tout $x$ de $I$, $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Dans ces conditions, si $x_0$ est un point de $I$ et si $u_0$ est un élément quelconque de $E$, il existe une unique primitive $G$ de $f$ qui prend la valeur $u_0$ et $x_0$.
  Cette primitive est donnée par : $G = F - F(x_0) + u_0$.

### Remarque

Pour l'instant, rien ne permet de dire si une application $f$ continue par morceaux sur un intervale $I$ y admet des primitives. Le théorème suivant donne la réponse.

## IV.2 Le théorème fondamental

### Théorème

Si $f$ est continue par morceaux de $I$ dans $E$, elle y admet des primitives.

Celle qui s'annule en en un point $a$ de $I$ est l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Pour toute primitive $G$ de $f$ , et pour tous points $a, x$ de $I$, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.

### Conséquence

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I$, alors : $\forall (a, x) \in I^2, \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.

**Proposition** *(Intégrale fonction de ses bornes)*

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $E$. Soient $u$ et $v$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$, à valeurs rélles, et telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

L'application $G$ de $J$ dans $E$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sa dérivée est : $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

## IV.3 Calcul des intégrales

**Proposition** *(Intégrales des fonctions paires ou impaires)*

On suppose que l'intervalle $I$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $f$ une application définie sur $I$, à valeurs dans $E$, continue par morceaux.

- Si $f$ est paire alors : $\forall a \in I, \displaystyle\int_{-a}^{a} = 2\int_{0}^{a} f$.
- Si $f$ est impaire alors : $\forall a \in I, \displaystyle\int_{-a}^{a} = 0$

**Proposition** *(Intégrales des fonctions périodiques)*

Soit $f : I \to E$ une application continue par morceaux et $T$-périodique.

- Pour tous réels $a$ et $b$, pour tout entier relatif $k$ $\displaystyle\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_{a}^{b} f$.
- Pour tous réels $a$ et $b$, $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f = \int_{b}^{b+T} f$.

**Proposition** *(Intégration par parties)*

Soient $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors $\displaystyle\int_{a}^{b} fg' = [fg]_a^b - \int_{a}^{b} f'g$.

### Remarques

- On utilise bien sûr la notation $[h]_a^b = h(b) - h(a)$.
- Le résultat s'étend au cas une application est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'autre dans $E$.

**Proposition** *(Intégrations par parties répétées)*

Soient $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux.

$$\int_{a}^{b} fg^{(n)} = \left[fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-2}f^{(n-2)}g' + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}g'\right]_a^b + (-1)^n \int_{a}^{b} f^{(n)}g.$$

**Proposition** *(Changement de variable)*

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi$ une application de $J$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points $a$ et $b$ de $J$ : $\displaystyle\int_a^b \varphi'(f \circ \varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

**Remarques**

– Avec la notation définitive de l'intégrale, l'égalité précédente s'écrit :

$\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$, où $c = \varphi(a)$ et $d = \varphi(b)$.

Pour l'utiliser on applique mécaniquement : $x = \varphi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Dans un sens, le passage de $a, b$ à $c, d$ est univoque.

Dans l'autre sens, il faut trouver $a, b$ dans $J$ tels que $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, ce qui est possible de manière unique si $\varphi$ est bijective de $I$ sur $J$.

– La formule s'étend au cas où $f$ est seulement continue par morceaux, mais il est alors nécessaire que $\varphi$ soit strictement monotone sur $[a, b]$.

## IV.4 Le théorème du relèvement

**Proposition**

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = l\}$.

L'application $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est un *homéomorphisme* de $]-\pi, +\pi[$ sur $U - \{-l\}$, c'est-à-dire une bijection continue dont l'inverse est continue.

La bijection inverse est notée *Arg* et appelée fonction *argument*.

Pour tout $z = x + iy$ de $U$, avec $z \neq 1$, $Arg(z) = 2\arctan \dfrac{y}{1+x}$.

**Théorème**

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ de $I$ dans $U$, avec $n \geq 1$.

Alors il existe une application $\theta$ de $I$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$, telle que pour tout $x$ de $I$ : $f(x) = \exp(i\theta(x))$. On dit que l'application $\theta$ est un *relèvement* de $f$.

**Remarques**

– Avec les notations précédentes, $\theta$ n'est pas le seul relèvement de $f$.

En effet, pour tout entier relatif $k$, l'application $x \mapsto \theta(x) + 2k\pi$ convient encore.

# V Accroissements finis et formules de Taylor

## V.1 Inégalité des accroissements finis

**Proposition**

Soit $f$ une application continue de $[a, b]$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que pour tout $x$ de $]a, b[$, $\|f'(x)\| \leq M$.
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M\,|b - a|$.

**Cas particulier**

On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M\,|b - a|$, avec $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$.

**Remarques**

– L'inégalité des accroissements finis reste valable si $f$ est seulement supposée continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a, b[$.
– Attention ! Le théorème de Rolle et l'*égalité* des accroissements finis ne sont valables que pour des applications à valeurs *réelles*.

  Par exemple, l'application $f : t \mapsto \exp(it)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et elle vérifie $f(0) = f(1)$.

  Pourtant sa dérivée $f' : t \mapsto i\exp(it)$ ne s'annule jamais sur $]0, 2\pi[$.

**Proposition** *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $E$, dérivable sur l'intérieur de $I$.
$f$ est $k$-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout $x$ de $I$, $\|f'(x)\| \leq k$.

**Proposition** *(Prolongement d'une application dérivable)*

Soit $f$ une application continue de $[a, b]$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que $f'$ possède dans $E$ une limite $\ell$ en $a$ à droite.
Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $f'(a) = \ell$.

**Remarque**

On obtient un résultat analogue au point $b$ de $[a, b]$.

Plus généralement, si $f$ est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b]$, et si pour tout $k \leq n$ l'application $f^{(k)}$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.

## V.2 Formules de Taylor

**Proposition** *(Formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f: \ I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur $I$.
Soit $a$ un point de $I$. Alors pour tout $x$ de $I$, $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a), \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

$R_n$ est appelé le *reste d'ordre* $n$ de la formule de Taylor de $f$ au point $a$.

**Proposition** *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f: \ I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soient $a$ et $b$ deux points de $I$.

Alors : $\left\| f(b) - f(a) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) \right\| \leq M\, \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ , où $M = \sup\limits_{[a,b]} \left\| f^{n+1} \right\|$.

### Remarques

- Si $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- En posant $h = b - a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang $n$ s'écrit :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}\, f^{(k)}(a) \right\| \leq M\, \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où } M = \sup_{[a,a+h]} \left\| f^{n+1} \right\|.$$

## V.3 Application aux développements limités

**Définition**

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$. Soient $x_0$ un point de $I$ et $n$ un entier naturel.
On dit que $f$ possède un *développement limité* (un *DL*) d'ordre $n$ en $x_0$ s'il existe $n+1$ vecteurs $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $E$, et une application $\varepsilon$ de $I$ dans $E$ tels que, pour tout $x$ de $I$ :
$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

### Remarques et propriétés

- On note souvent $\mathrm{o}(x - x_0)^n$ plutôt que $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$.
- Si $f$ possède un *DL* d'ordre $n$ en $x_0$, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont uniques.
- Si $f$ a un *DL* d'ordre $n$ en $x_0$, elle a un *DL* en $x_0$ à tout ordre $p \leq n$, par *troncature*.
- $f$ admet un *DL* d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en $x_0$.
  Ce *DL* s'écrit $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.
- $f$ admet un *DL* d'ordre 1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en $x_0$.
  Ce *DL* s'écrit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

– $f$ possède un $DL$ d'ordre $n$ en $x_0$ $\Leftrightarrow$ l'application $g$ définie par $g(x) = f(x_0 + x)$ possède un $DL$ d'ordre $n$ en 0, et avec les mêmes coefficients.

  Cette propriété permet de ramener tous les $DL$ à l'origine.

**Proposition** *(DL obtenu par primitivation d'une application continue)*

Soit $g$ une application continue de $I$ dans $E$, admettant un $DL$ d'ordre $n$ en $x_0$ :
$g(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + \mathrm{o}(x - x_0)^n$.
Alors toute primitive $f$ de $g$ admet un $DL$ d'ordre $n + 1$ en $x_0$ :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 a_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \mathrm{o}(x - x_0)^{n+1}.$$

**Remarques**

– On remarque que le $DL$ de $f$ est obtenu par intégration terme à terme de celui de $g$.

– La propriété précédente est vraie notamment si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ : L'existence d'un $DL$ d'ordre $n$ pour $f'$ prouve l'existence d'un $DL$ d'ordre $n + 1$ pour sa primitive $f$.

– Dans un $DL$ obtenu par primitivation, on n'oubliera pas la constante d'intégration !

**Proposition** *(Formule de Taylor-Young)*

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ de $I$ dans $E$.
Soit $x_0$ un point de $I$. Alors $f$ possède un $DL$ d'ordre $n$ en $x_0$, sous la forme :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)^n.$$

# VI Intégrales dépendant d'un paramètre

On désigne par $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

**Proposition** *(Continuité sous le signe d'intégration)*

Soit $f$ une application continue sur $I \times [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application $g$ définie sur $I$ par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$ est continue.

**Proposition** *(Dérivation sous le signe d'intégration)*

Soit $f$ une application continue sur $I \times [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que $f$ admet sur $I \times [a, b]$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue.

Alors l'application $g$ définie sur $I$ par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $x$ de $I$, $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t$ *(Formule de Leibniz.)*

**Remarque**

Plus généralement, si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \times [a, b]$, alors $g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et :

$\forall k \in \{1, ..., n\}, \forall x \in I, g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\mathrm{d}t.$

**Proposition** *(Interversion de deux signes d'intégration)*

Soit $f$ une application continue sur $I \times [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout segment $[c, d]$ inclus dans $I$, on a l'égalité :

$\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t$ *(Théorème de Fubini.)*