I Dérivabilité d'une fonction vectorielle

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$ (comme d'habitude, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I.1 Dérivabilité en un point

Définition *(Vecteur dérivé en un point)*

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E.

Cette limite est appelée *vecteur dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$.

Définitions complémentaires

– *Vecteur dérivée à gauche*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité gauche de I.

On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a, x < a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E.

Cette limite est appelée vecteur dérivé à gauche de f en a et est notée $f'_g(a)$.

– *Vecteur dérivée à droite*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité droite de I.

On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x \to a, x > a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E.

Cette limite est appelée vecteur dérivé à droite de f en a et est notée $f'_d(a)$.

Proposition *(Une autre définition de la dérivabilité)*

L'application f est dérivable en un point a de I $\Leftrightarrow$ il existe :

◇ Un vecteur ℓ de E

◇ Une application $x \mapsto \varepsilon(x)$ de I dans E, vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(a) = 0$

tels que pour tout x de I : $f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$.

Le vecteur ℓ est alors égal à $f'(a)$.

Propriétés immédiates

– f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

– Si f dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse. De même, si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, elle est continue à gauche (resp. à droite) en a.

– La notion d'application dérivable et la valeur des vecteurs dérivés ne dépendent pas de la norme choisie sur E car on a supposé que E est de dimension finie : toutes les normes sur E sont donc équivalentes.

I.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

L'application $f' : I \to E$ qui à tout a associe $f'(a)$ est appelée *application dérivée* de f.

Cette application est également notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Définition (*Applications de classe $\mathcal{C}^1$*)

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarque

Nombre des propriétés qui suivent pourraient être énoncées en termes de vecteurs dérivés en un point ou d'applications dérivables. Conformément au programme elles sont énoncées en termes d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition (*Dérivabilité des applications composantes*)

Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les composantes de f : $\forall x \in I, f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow$ ses composantes f_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

On a alors : $\forall x \in I, f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'_k(x)e_k$.

Cas particuliers

- Si $E = \mathbb{K}^n$ et si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, alors $f' = (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$.
- Supposons que f soit à valeurs complexes, et notons $g = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f})$ et $h = \mathrm{Im}\,(f)$.

  Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow g$ et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

  On a alors $f' = g' + ih'$, ou encore $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(g) + i\mathrm{D}(g)$.

  De même $\bar{f} = g - ih$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $D(\bar{f}) = g' - ih' = \overline{D(f)}$.
- *Applications à valeurs matricielles*

  Soit M une application de I dans $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\forall x \in I, M(x) = (a_{i,j}(x))$.

  M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow$ les np applications $x \mapsto a_{i,j}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

  Dans ces conditions, $\forall x \in I, M'(x)$ est la matrice de terme général $a'_{i,j}(x)$.

Proposition (*Caractérisation des applications constantes*)

Toute application constante f de I dans E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et son application dérivée f' est l'application nulle.

Réciproquement, si f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et si f' est l'application nulle, alors f est constante sur I.