II Applications de classe Ck

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés E, F, G sont de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Opérations sur les applications de classe C1

Proposition *(Linéarité de la dérivation)*

$\mathcal{C}^1(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(I,E)$ des applications continues de I dans E, lui-même un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}(I,E)$ de toutes les applications I dans E.
$\forall f,g \in \mathcal{C}^1(I,E), \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition *(Composition par une application linéaire)*

Soit f une application de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F, et $(uof)' = uof'$.

Proposition *(Composition par une application bilinéaire)*

Soit f une application de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit g une application de I dans F, de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Alors l'application h définie par $h(x) = B(f(x), g(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans G.
De plus $h' = (B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$.

Cas particuliers

- Si E est une algèbre normée, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E, alors $h = fg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $h' = f'g + fg'$.

  Par récurrence, on vérifie alors que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \cdots f_n$.

  Si de plus E est commutative, alors pour tout entier p : $(f^p)' = p\, f'\, f^{p-1}$.

  Le cas le plus courant est évidemment $E = \mathbb{K}$.

- Soient $f : I \to E$, et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

  Alors $g = \lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

- Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et si E est muni d'un produit scalaire, alors l'application $< f,g >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $< f,g >' = < f',g > + < f,g' >$.

- Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E, alors $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Dérivée de l'inverse)*

Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$, ne s'annulant pas.

Alors $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

La formule $(g^m)' = mg'g^{m-l}$ est alors vraie pour tout entier relatif m.

Si $f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition *(Dérivée d'une fonction composée)*

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit J un intervalle contenant $\varphi(I)$ et non réduit à un point.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans E.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Autrement dit : $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$.

II.2 Dérivées successives

Définition *(Applications n fois dérivables sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans E. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de I dans E.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to E$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée n-ième* de f sur I.

L'application $f^{(n)}$ est parfois notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.

Remarque *(Vecteur dérivé n-ième en un point)*

Soit f une application de I dans E, a un point de I et n un entier naturel. On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *vecteur dérivé n-ième* de f au point a de I (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur I tout entier.)

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de I dans E, k fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur I.

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur I si f est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k (c'est-à-dire en fait si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k).

On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarque

$\mathcal{C}^0(I,E)$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans E.

On a les inclusions $\mathcal{C}^0(I,E) \supset \mathcal{C}^1(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I,E)$.

De même on a : $\mathcal{C}^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,E)$.

II.3 Opérations sur les applications de classe Ck

Proposition *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

$\mathcal{C}^k(I,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire de $\mathcal{C}^k(I,E)$ dans $\mathcal{C}^0(I,E)$.

Proposition *(Formule de Leibniz)*

Soit n un élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Remarques

– Le résultat précédent implique que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'algèbre.

– "Leibniz" est encore valable si f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g est à valeurs dans E, ou si f et g sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée E.

Proposition *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $\varphi(I)$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans E.

Alors l'application $f\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

II.4 Difféomorphismes

Définition *($\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

On dit qu'une application f de I dans J est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* si f est une bijection de I sur J, et si les deux applications f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition *(Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur $J = f(I) \Leftrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout x de I, $f'(x) \neq 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.5 Applications de classe Ck par morceaux

Définition

Soit f une application définie sur le segment $[a,b]$, à valeurs dans E.

Soit k un entier naturel. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ *par morceaux* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ et soit prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Dans ce cas, on dit que la subdivision $(a_j)_{0\leq j\leq n}$ est *adaptée* à f.

Remarques

- Si f est de de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a,b]$ alors ses dérivées successives, encore notées f^j ou $D^j(f)$ avec $1 \leq j \leq k$, sont définies sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points.
- Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (et donc plus nécessairement un segment), l'application $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout sous-segment de I.
- On vérifie que l'ensemble $\mathcal{M}^k(I,E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I, à valeurs dans E, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

Proposition *(Caractérisation des applications constantes)*

Soit f une application de I dans E, continue et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Alors f est constante sur $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$ sur I.

(Cette propriété est surtout utile dans le sens $\Leftarrow$.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021