II Applications de classe Ck

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés E, F, G sont de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Opérations sur les applications de classe C1

Proposition *(Linéarité de la dérivation)*

$\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(I, E)$ des applications continues de I dans E, lui-même un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}(I, E)$ de toutes les applications I dans E.
$\forall f, g \in \mathcal{C}^1(I, E), \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition *(Composition par une application linéaire)*

Soit f une application de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit u une application linéaire de E dans F.

Alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F, et $(uof)' = uof\,'$.

Proposition *(Composition par une application bilinéaire)*

Soit f une application de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit g une application de I dans F, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

Alors l'application h définie par $h(x) = B(f(x), g(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans G.

De plus $h' = (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

Cas particuliers

– Si E est une algèbre normée, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E, alors $h = fg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $h' = f'g + fg'$.

  Par récurrence, on vérifie alors que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n$.

  Si de plus E est commutative, alors pour tout entier p : $(f^p)' = p\, f'\, f^{p-1}$.

  Le cas le plus courant est évidemment $E = \mathbb{K}$.

– Soient $f : I \to E$, et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

  Alors $g = \lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

– Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et si E est muni d'un produit scalaire, alors l'application $< f, g >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $< f, g >' = < f', g > + < f, g' >$.

– Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E, alors $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

Proposition *(Dérivée de l'inverse)*

Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$, ne s'annulant pas.

Alors $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

La formule $(g^m)' = mg'g^{m-l}$ est alors vraie pour tout entier relatif m.

Si $f : \ I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition *(Dérivée d'une fonction composée)*

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit J un intervalle contenant $\varphi(I)$ et non réduit à un point.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans E.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Autrement dit : $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$.

II.2 Dérivées successives

Définition *(Applications n fois dérivables sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans E. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de I dans E.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to E$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée n-ième* de f sur I.

L'application $f^{(n)}$ est parfois notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.

Remarque *(Vecteur dérivé n-ième en un point)*

Soit f une application de I dans E, a un point de I et n un entier naturel. On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *vecteur dérivé n-ième* de f au point a de I (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur I tout entier.)

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de I dans E, k fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur I.

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur I si f est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k (c'est-à-dire en fait si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k).

On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarque

$\mathcal{C}^0(I,E)$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans E.

On a les inclusions $\mathcal{C}^0(I,E) \supset \mathcal{C}^1(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I,E)$.

De même on a : $\mathcal{C}^\infty(I,E) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,E)$.

II.3 Opérations sur les applications de classe Ck

Proposition *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

$\mathcal{C}^k(I,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire de $\mathcal{C}^k(I,E)$ dans $\mathcal{C}^0(I,E)$.

Proposition *(Formule de Leibniz)*

Soit n un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Remarques

- Le résultat précédent implique que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'algèbre.
- "Leibniz" est encore valable si f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g est à valeurs dans E, ou si f et g sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée E.

Proposition *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $\varphi(I)$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans E.

Alors l'application $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

II.4 Difféomorphismes

Définition *($\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

On dit qu'une application f de I dans J est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* si f est une bijection de I sur J, et si les deux applications f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition *(Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur $J = f(I) \Leftrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout x de I, $f'(x) \neq 0$.

II.5 Applications de classe Ck par morceaux

Définition

Soit f une application définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans E.

Soit k un entier naturel. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ *par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ et soit prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Dans ce cas, on dit que la subdivision $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ est *adaptée* à f.

Remarques

– Si f est de de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$ alors ses dérivées successives, encore notées f^j ou $D^j(f)$ avec $1 \leq j \leq k$, sont définies sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points.

– Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (et donc plus nécessairement un segment), l'application $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout sous-segment de I.

– On vérifie que l'ensemble $\mathcal{M}^k(I, E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I, à valeurs dans E, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$.

Proposition *(Caractérisation des applications constantes)*

Soit f une application de I dans E, continue et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Alors f est constante sur $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$ sur I.

(Cette propriété est surtout utile dans le sens $\Leftarrow$.)