

## II Applications de classe $C^k$

On rappelle que  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés  $E, F, G$  sont de dimension finie sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### II.1 Opérations sur les applications de classe $C^1$

**Proposition** (*Linéarité de la dérivation*)

$\mathcal{C}^1(I, E)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{C}(I, E)$  des applications continues de  $I$  dans  $E$ , lui-même un sous-espace de l'espace  $\mathcal{F}(I, E)$  de toutes les applications  $I$  dans  $E$ .  
 $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(I, E), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ .

**Proposition** (*Composition par une application linéaire*)

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $E$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  
Alors  $u \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $F$ , et  $(u \circ f)' = u \circ f'$ .

**Proposition** (*Composition par une application bilinéaire*)

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $E$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Soit  $g$  une application de  $I$  dans  $F$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Soit  $B$  une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $G$ .  
Alors l'application  $h$  définie par  $h(x) = B(f(x), g(x))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $G$ .  
De plus  $h' = (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$ .

#### Cas particuliers

– Si  $E$  est une algèbre normée, et si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $E$ , alors  $h = fg$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $h' = f'g + fg'$ .

Par récurrence, on vérifie alors que si  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  alors  $f = f_1 f_2 \cdots f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f' = \sum_{k=1}^n f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n$ .

Si de plus  $E$  est commutative, alors pour tout entier  $p : (f^p)' = p f' f^{p-1}$ .

Le cas le plus courant est évidemment  $E = \mathbb{K}$ .

– Soient  $f : I \rightarrow E$ , et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Alors  $g = \lambda f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$ .

– Si  $f, g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $I$  et si  $E$  est muni d'un produit scalaire, alors l'application  $\langle f, g \rangle$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$ .

– Si  $E$  est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $E$ , alors  $f \wedge g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$ .

**Proposition** (Dérivée de l'inverse)

Soit  $g$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , ne s'annulant pas.

Alors  $\frac{1}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :  $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ .

La formule  $(g^m)' = mg'g^{m-1}$  est alors vraie pour tout entier relatif  $m$ .

Si  $f : I \rightarrow E$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors  $\frac{f}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

**Proposition** (Dérivée d'une fonction composée)

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $J$  un intervalle contenant  $\varphi(I)$  et non réduit à un point.

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $J$  dans  $E$ .

Alors  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $E$  et :  $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ .

Autrement dit :  $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$ .

## II.2 Dérivées successives

**Définition** (Applications  $n$  fois dérivables sur un intervalle)

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $E$ . On pose  $f^{(0)} = f$ .

On suppose que l'application  $f^{(n-1)}$  existe et est dérivable de  $I$  dans  $E$ .

On définit alors l'application  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

Si l'application  $f^{(n)} : I \rightarrow E$  existe, on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur l'intervalle  $I$ , et  $f^{(n)}$  est appelée *application dérivée  $n$ -ième* de  $f$  sur  $I$ .

L'application  $f^{(n)}$  est parfois notée  $D^n f$  ou encore  $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

**Remarque** (Vecteur dérivé  $n$ -ième en un point)

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $E$ ,  $a$  un point de  $I$  et  $n$  un entier naturel. On dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $a$  si  $f$  est  $n - 1$  fois dérivable sur un voisinage de  $a$  et si  $f^{(n-1)}$  est dérivable en  $a$ .

On note encore  $f^{(n)}(a)$  cette dérivée, appelée *vecteur dérivé  $n$ -ième* de  $f$  au point  $a$  de  $I$  (il n'est pas nécessaire que  $f^{(n)}$  existe sur  $I$  tout entier.)

**Définition** (Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ )

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $E$ ,  $k$  fois dérivable.

Si de plus l'application  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

On note  $\mathcal{C}^k(I, E)$  l'ensemble des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $E$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  si  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $I$  pour tout entier naturel  $k$  (c'est-à-dire en fait si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k$ ).

On note  $\mathcal{C}^\infty(I, E)$  l'ensemble de ces applications.

**Remarque**

$\mathcal{C}^0(I, E)$  désigne l'ensemble des applications continues de  $I$  dans  $E$ .

On a les inclusions  $\mathcal{C}^0(I, E) \supset \mathcal{C}^1(I, E) \supset \dots \supset \mathcal{C}^k(I, E) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(I, E)$ .

De même on a :  $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, E)$ .

## II.3 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

**Proposition** (*Combinaisons linéaires d'applications de classe  $\mathcal{C}^k$* )

||  $\mathcal{C}^k(I, E)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

|| L'application  $f \mapsto f^{(k)}$  est linéaire de  $\mathcal{C}^k(I, E)$  dans  $\mathcal{C}^0(I, E)$ .

**Proposition** (*Formule de Leibniz*)

|| Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

|| Alors  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et :  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .

**Remarques**

- Le résultat précédent implique que  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  est muni d'une structure d'algèbre.
- "Leibniz" est encore valable si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $g$  est à valeurs dans  $E$ , ou si  $f$  et  $g$  sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée  $E$ .

**Proposition** (*Inverse d'une application de classe  $\mathcal{C}^k$* )

|| Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et ne s'annule pas, alors  $\frac{1}{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

**Proposition** (*Composition d'applications de classe  $\mathcal{C}^k$* )

|| Soit  $\varphi$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

|| Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non réduit à un point et contenant  $\varphi(I)$ .

|| Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $J$  dans  $E$ .

|| Alors l'application  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $E$ .

## II.4 Difféomorphismes

**Définition** ( *$\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes*)

|| Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , non réduits à un point.

|| On dit qu'une application  $f$  de  $I$  dans  $J$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $J$ , et si les deux applications  $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Proposition** (*Caractérisation des  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes*)

||  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $I$  sur  $J = f(I) \Leftrightarrow f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \neq 0$ .

## II.5 Applications de classe $C^k$ par morceaux

### Définition

Soit  $f$  une application définie sur le segment  $[a, b]$ , à valeurs dans  $E$ .

Soit  $k$  un entier naturel. On dit que  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $\{a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b\}$  de  $[a, b]$  telle que la restriction de  $f$  à chaque sous-intervalle  $]a_j, a_{j+1}[$  soit de classe  $C^k$  et soit prolongeable en une application de classe  $C^k$  sur  $[a_j, a_{j+1}]$ .

Dans ce cas, on dit que la subdivision  $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$  est adaptée à  $f$ .

### Remarques

- Si  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur  $[a, b]$  alors ses dérivées successives, encore notées  $f^j$  ou  $D^j(f)$  avec  $1 \leq j \leq k$ , sont définies sur  $[a, b]$  privé d'un nombre fini de points.
- Si  $I$  est un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  (et donc plus nécessairement un segment), l'application  $f : I \rightarrow E$  est dite de classe  $C^k$  par morceaux sur  $I$  si  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur tout sous-segment de  $I$ .
- On vérifie que l'ensemble  $\mathcal{M}^k(I, E)$  des applications de classe  $C^k$  par morceaux sur  $I$ , à valeurs dans  $E$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$ .

### Proposition (Caractérisation des applications constantes)

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $E$ , continue et de classe  $C^k$  par morceaux.

Alors  $f$  est constante sur  $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$  sur  $I$ .

(Cette propriété est surtout utile dans le sens  $\Leftarrow$ .)