III Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans cette section E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

III.1 Fonctions en escaliers

Définition *(Subdivisions)*

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.
L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Remarque

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient celui de σ'.

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de σ et de σ' est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ'.

Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que σ et σ', alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

Définition *(Applications en escaliers)*

Soit f une application de $[a, b]$ dans E. On dit que f est *en escaliers* s'il existe :
– Une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$,
– n vecteurs $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de E,
tels que : $\forall k = 0, \ldots, n-1, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à f.

Remarques et notations

– Si σ est une subdivision adaptée à f, toute subvision plus fine que σ est adaptée à f.
– On note $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
– Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
– Tout combinaison linéaire de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.
$\mathcal{E}([a, b], E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], E)$.
– Si E est une algèbre, notamment si $E = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}([a, b], E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a, b], E)$: le produit de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.2 Intégrale des fonctions en escaliers

Définition

Soient $f : I \to E$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ une subdivision adaptée.
On suppose que : $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
Le vecteur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)u_k$ est appelé *intégrale* de f et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Propriétés

- L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision adaptée á f choisie.
- Si f est constante égale à u sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = (b-a)u$.
- Si l'application f est nulle sur $[a,b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points,alors elle est élément de $\mathcal{E}([a,b],E)$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
- L'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{E}([a,b],E)$ dans E.
- Si f appartient à $\mathcal{E}([a,b],E)$, alors l'application $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ est également en escaliers. De plus on a l'inégalité : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.
- Si f appartient à $\mathcal{E}([a,b],E)$ et si c est un élément de $]a,b[$, alors les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont en escaliers et : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
- Soit f un élément de $\mathcal{E}([a,b],E)$ et u une application linéaire de E dans F. Alors $u\circ f$ est en escaliers de $[a,b]$ dans F et $\displaystyle\int_{[a,b]} u\circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

Cas des applications à valeurs réelles

- Si f appartient à $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- Si f, g appartiennent à $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

Remarque

Si f est en escaliers de $[a,b]$ dans E, alors $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|$.

III.3 Définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Notation

On note $\mathcal{M}([a,b],E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a,b]$.
C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a,b],E)$ des applications bornées sur E.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition et définition *(Intégrale sur $\mathcal{M}([a,b],E)$)*

Soit f un élément de $\mathcal{M}([a,b],E)$.

On sait qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers l'application f.

Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n$ est convergente dans E.

On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$. Cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a,b]$

Remarques

- La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite (φ_n) de fonctions en escaliers utilisée pour approcher f.
- Elle ne dépend pas non plus de la norme choisie sur E (on rappelle que E est supposé être de dimension finie : toutes les normes sur E sont donc équivalentes.)
- Si l'application f est en escaliers sur $[a,b]$ elle est continue par morceaux.
  L'intégrale de f est évidemment la même selon les deux points de vue.
- Si f est à valeurs réelles, la suite (φ_n) peut être choisie telle que pour tout n, $\varphi_n \leq f$ sur $[a,b]$ (ou telle que pour tout n, $\varphi_n \geq f$ sur $[a,b]$.)

  Si f est à valeurs réelles positives, la suite (φ_n) peut être choisie telle que les φ_n soient elles aussi à valeurs positives sur $[a,b]$.

Proposition *(Invariance de l'intégrale par translation)*

Soit f une application de $I=[a,b]$ dans E, continue par morceaux.

Soit α un nombre réel.

On définit l'application g de $J=[a+\alpha, b+\alpha]$ dans E par $g(t)=f(t-\alpha)$.

Alors g est continue par morceaux sur J et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

III.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Elles découlent de celles de $\mathcal{E}([a,b],E)$ par passage à la limite.

- **Linéarité**
  L'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{M}([a,b],E)$ dans E.
- **Extension aux applications définies "presque partout"**
  Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est encore continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

  En particulier si f est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, et si la restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

à $[x_k, x_{k+1}]$ alors on peut encore définir l'intégrale de f, en donnant éventuellement à f une valeur quelconque en chacun des x_k.

– **Composition par une application linéaire**
Soit $f : [a,b] \to E$, continue par morceaux. Soit u une application linéaire de E dans F.
L'application $u \circ f$ appartient à $\mathcal{M}([a,b], F)$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

– **Intégrale et composantes dans une base**
Soit f une application de $[a,b]$ dans E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
On note $f_1, \ldots, f_n$ ses composantes : $\forall x \in [a,b], f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, e_k$.
f est continue par morceaux $\Leftrightarrow$ les composantes f_k sont continues par morceaux.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{[a,b]} f_k\right) e_k$.
En particulier, si $E = \mathbb{C}$ et si $f = g + ih$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g + i\int_{[a,b]} h$.
Autrement dit : $\mathrm{Re}\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f$, et $\mathrm{Im}\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$

– **Intégrale de la norme**
Si f appartient à $\mathcal{M}([a,b], E)$, alors l'application $\|f\|$, à valeurs réelles et définie sur $[a,b]$ par $t \mapsto \|f(t)\|$, est également continue par morceaux.
De plus on a l'inégalité : $\left\|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.

III.5 Positivité et croissance de l'intégrale pour les fonctions réelles

On rappelle que le segment $[a,b]$ est tel que $a < b$.

Proposition *(Positivité et croissance de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
– Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
– Si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.
– On suppose que f garde un signe constant sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
  ◇ Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$, alors $f(x_0) = 0$.
  ◇ En particulier, si f est continue sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques

– Le résultat précédent peut s'énoncer, en supposant $f \geq 0$ sur $[a,b]$:

Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$ et si $f(x) > 0$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$. En particulier, si f est continue ≥ 0 mais non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

– Si f et g sont continues, si $f \leq g$ sur $[a,b]$ et si $f \neq g$, alors $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

Proposition *(Inégalité de la moyenne)*

Soit f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

Alors $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

III.6 Extension de la définition et notation définitive

Notation

Soit f une application continue par morceaux de I dans E.

Pour tous points a, b de I, on note :

Si $a < b$, $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$; Si $a > b$, $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$; Si $a = b$, $\int_a^b f = 0$.

Remarques

– On dispose maintenant de la notation $\int_a^b f$, pour deux points quelconques a et b d'un intervalle I sur lequel f est continue par morceaux. On vérifie que $\forall (a,b) \in I^2$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

– Les propriétés précédentes, relatives à la linéarité ou aux composantes, restent valables.

– En revanche, les propriétés relatives à la positivité et à la croissance dépendent de la position respective des bornes de l'intégrale.

– L'inégalité de la moyenne devient : $\forall (a,b) \in I^2$, $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

– Si f est continue par morceaux sur I, à valeurs dans E, et si a, b, c sont trois points quelconques de $[a,b]$, alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *(Relation de Chasles.)*

On peut généraliser à une suite finie $c_1, \ldots, c_n$ de points de I : $\int_{c_1}^{c_n} f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$.

Notation

On note souvent $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ plutôt que $\int_a^b f$. Dans cette notation t est une variable *muette*.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soient f et g deux applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Alors pour tous points a et b de I : $\left|\int_a^b f\,\bar{g}\right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$.

En particulier, si f g sont à valeurs réelles : $\left(\int_a^b f\,g\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Si f et g sont continues sur le segment $[a,b]$, les inégalités précédentes sont des égalités $\Leftrightarrow f$ et g sont proportionnelles sur $[a,b]$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021