

## IV Primitives et intégrales

Dans cette section,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non réduit à un point, et  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### IV.1 Primitives

#### Définition

Soit  $f$  une application continue de  $I$  dans  $E$ .  
On dit qu'une application  $F : I \rightarrow E$  est une *primitive* de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et si, pour tout  $x$  de  $I$  :  $F'(x) = f(x)$ .

#### Extension de la définition

On suppose seulement que  $f : I \rightarrow E$  est continue par morceaux.

Une primitive de  $f$  est alors toute application  $F : I \rightarrow E$ , continue, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, et telle que  $F'(x) = f(x)$  en tout point de continuité de  $f$ .

#### Propriétés

- Soit  $f$  une application continue par morceaux de  $I$  dans  $E$  admettant une primitive  $F$ .  
Soit  $G$  une application de  $I$  dans  $E$ .  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$   $\Leftrightarrow$  il existe une constante  $\lambda$  telle que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) = F(x) + \lambda$ .
- Dans ces conditions, si  $x_0$  est un point de  $I$  et si  $u_0$  est un élément quelconque de  $E$ , il existe une unique primitive  $G$  de  $f$  qui prend la valeur  $u_0$  en  $x_0$ .  
Cette primitive est donnée par :  $G = F - F(x_0) + u_0$ .

#### Remarque

Pour l'instant, rien ne permet de dire si une application  $f$  continue par morceaux sur un intervalle  $I$  y admet des primitives. Le théorème suivant donne la réponse.

### IV.2 Le théorème fondamental

#### Théorème

Si  $f$  est continue par morceaux de  $I$  dans  $E$ , elle y admet des primitives.  
Celle qui s'annule en un point  $a$  de  $I$  est l'application  $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ .  
Pour toute primitive  $G$  de  $f$ , et pour tous points  $a, x$  de  $I$ , on a :  $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$ .

#### Conséquence

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$ , alors :  $\forall (a, x) \in I^2, \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ .

**Proposition** (*Intégrale fonction de ses bornes*)

Soit  $f$  une application continue de  $I$  dans  $E$ . Soient  $u$  et  $v$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^1$ , définies sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, et telles que  $u(J) \subset I$  et  $v(J) \subset I$ .

L'application  $G$  de  $J$  dans  $E$  définie par  $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Sa dérivée est :  $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$ .

### IV.3 Calcul des intégrales

**Proposition** (*Intégrales des fonctions paires ou impaires*)

On suppose que l'intervalle  $I$  est symétrique par rapport à 0.

Soit  $f$  une application définie sur  $I$ , à valeurs dans  $E$ , continue par morceaux.

– Si  $f$  est paire alors :  $\forall a \in I, \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$ .

– Si  $f$  est impaire alors :  $\forall a \in I, \int_{-a}^a f = 0$

**Proposition** (*Intégrales des fonctions périodiques*)

Soit  $f : I \rightarrow E$  une application continue par morceaux et  $T$ -périodique.

– Pour tous réels  $a$  et  $b$ , pour tout entier relatif  $k$   $\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_a^b f$ .

– Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$ .

**Proposition** (*Intégration par parties*)

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Alors  $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$ .

**Remarques**

– On utilise bien sûr la notation  $[h]_a^b = h(b) - h(a)$ .

– Le résultat s'étend au cas une application est à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et l'autre dans  $E$ .

**Proposition** (*Intégrations par parties répétées*)

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux.

$\int_a^b fg^{(n)} = [fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-2}f^{(n-2)}g' + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}g']_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g$ .

**Proposition** (*Changement de variable*)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , non réduits à un point.

Soit  $f$  une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\varphi$  une application de  $J$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que  $\varphi(J) \subset I$ .

Alors, pour tous points  $a$  et  $b$  de  $J$  : 
$$\int_a^b \varphi'(f \circ \varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

**Remarques**

– Avec la notation définitive de l'intégrale, l'égalité précédente s'écrit :

$$\int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))dt = \int_c^d f(x)dx, \text{ où } c = \varphi(a) \text{ et } d = \varphi(b).$$

Pour l'utiliser on applique mécaniquement :  $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ .

Dans un sens, le passage de  $a, b$  à  $c, d$  est univoque.

Dans l'autre sens, il faut trouver  $a, b$  dans  $J$  tels que  $\varphi(a) = c$  et  $\varphi(b) = d$ , ce qui est possible de manière unique si  $\varphi$  est bijective de  $I$  sur  $J$ .

– La formule s'étend au cas où  $f$  est seulement continue par morceaux, mais il est alors nécessaire que  $\varphi$  soit strictement monotone sur  $[a, b]$ .

## IV.4 Le théorème du relèvement

**Proposition**

Soit  $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = l\}$ .

L'application  $\theta \mapsto \exp(i\theta)$  est un *homéomorphisme* de  $] -\pi, +\pi[$  sur  $U - \{-l\}$ , c'est-à-dire une bijection continue dont l'inverse est continue.

La bijection inverse est notée *Arg* et appelée fonction *argument*.

Pour tout  $z = x + iy$  de  $U$ , avec  $z \neq 1$ ,  $Arg(z) = 2 \arctan \frac{y}{1+x}$ .

**Théorème**

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^n$  de  $I$  dans  $U$ , avec  $n \geq 1$ .

Alors il existe une application  $\theta$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^n$ , telle que pour tout  $x$  de  $I$  :  $f(x) = \exp(i\theta(x))$ . On dit que l'application  $\theta$  est un *relèvement* de  $f$ .

**Remarques**

– Avec les notations précédentes,  $\theta$  n'est pas le seul relèvement de  $f$ .

En effet, pour tout entier relatif  $k$ , l'application  $x \mapsto \theta(x) + 2k\pi$  convient encore.