# IV Primitives et intégrales

Dans cette section, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## IV.1 Primitives

### Définition

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $E$.

On dit qu'une application $F : I \to E$ est une *primitive* de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et si, pour tout $x$ de $I$ : $F'(x) = f(x)$.

### Extension de la définition

On suppose seulement que $f : I \to E$ est continue par morceaux.

Une primitive de $f$ est alors toute application $F : I \to E$, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de $f$.

### Propriétés

– Soit $f$ une application continue par morceaux de $I$ dans $E$ admettant une primitive $F$.

Soit $G$ une application de $I$ dans $E$. $G$ est une primitive de $f$ sur $I$ $\Leftrightarrow$ il existe une constante $\lambda$ telle que, pour tout $x$ de $I$, $G(x) = F(x) + \lambda$.

– Dans ces conditions, si $x_0$ est un point de $I$ et si $u_0$ est un élément quelconque de $E$, il existe une unique primitive $G$ de $f$ qui prend la valeur $u_0$ et $x_0$.
Cette primitive est donnée par : $G = F - F(x_0) + u_0$.

### Remarque

Pour l'instant, rien ne permet de dire si une application $f$ continue par morceaux sur un intervale $I$ y admet des primitives. Le théorème suivant donne la réponse.

## IV.2 Le théorème fondamental

### Théorème

Si $f$ est continue par morceaux de $I$ dans $E$, elle y admet des primitives.

Celle qui s'annule en en un point $a$ de $I$ est l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Pour toute primitive $G$ de $f$ , et pour tous points $a, x$ de $I$, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.

### Conséquence

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I$, alors : $\forall (a, x) \in I^2, \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.

**Proposition** *(Intégrale fonction de ses bornes)*

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $E$. Soient $u$ et $v$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$, à valeurs rélles, et telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

L'application $G$ de $J$ dans $E$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sa dérivée est : $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

## IV.3 Calcul des intégrales

**Proposition** *(Intégrales des fonctions paires ou impaires)*

On suppose que l'intervalle $I$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $f$ une application définie sur $I$, à valeurs dans $E$, continue par morceaux.

- Si $f$ est paire alors : $\forall a \in I, \displaystyle\int_{-a}^{a} = 2\int_0^a f$.
- Si $f$ est impaire alors : $\forall a \in I, \displaystyle\int_{-a}^{a} = 0$

**Proposition** *(Intégrales des fonctions périodiques)*

Soit $f: \ I \to E$ une application continue par morceaux et $T$-périodique.

- Pour tous réels $a$ et $b$, pour tout entier relatif $k$ $\displaystyle\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_a^b f$.
- Pour tous réels $a$ et $b$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$.

**Proposition** *(Intégration par parties)*

Soient $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors $\displaystyle\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$.

### Remarques

- On utilise bien sûr la notation $[h]_a^b = h(b) - h(a)$.
- Le résultat s'étend au cas une application est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'autre dans $E$.

**Proposition** *(Intégrations par parties répétées)*

Soient $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux.

$$\int_a^b fg^{(n)} = \left[fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-2}f^{(n-2)}g' + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}g'\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g.$$

**Proposition** *(Changement de variable)*

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi$ une application de $J$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points $a$ et $b$ de $J$ : $\displaystyle\int_a^b \varphi'(f \circ \varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

**Remarques**

- Avec la notation définitive de l'intégrale, l'égalité précédente s'écrit :

  $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$, où $c = \varphi(a)$ et $d = \varphi(b)$.

  Pour l'utiliser on applique mécaniquement : $x = \varphi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

  Dans un sens, le passage de $a, b$ à $c, d$ est univoque.

  Dans l'autre sens, il faut trouver $a, b$ dans $J$ tels que $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, ce qui est possible de manière unique si $\varphi$ est bijective de $I$ sur $J$.
- La formule s'étend au cas où $f$ est seulement continue par morceaux, mais il est alors nécessaire que $\varphi$ soit strictement monotone sur $[a, b]$.

## IV.4 Le théorème du relèvement

**Proposition**

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = l\}$.

L'application $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est un *homéomorphisme* de $]-\pi, +\pi[$ sur $U - \{-l\}$, c'est-à-dire une bijection continue dont l'inverse est continue.

La bijection inverse est notée *Arg* et appelée fonction *argument*.

Pour tout $z = x + iy$ de $U$, avec $z \neq 1$, $Arg(z) = 2\arctan \dfrac{y}{1+x}$.

**Théorème**

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ de $I$ dans $U$, avec $n \geq 1$.

Alors il existe une application $\theta$ de $I$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$, telle que pour tout $x$ de $I$ : $f(x) = \exp(i\theta(x))$. On dit que l'application $\theta$ est un *relèvement* de $f$.

**Remarques**

- Avec les notations précédentes, $\theta$ n'est pas le seul relèvement de $f$.

  En effet, pour tout entier relatif $k$, l'application $x \mapsto \theta(x) + 2k\pi$ convient encore.