IV Primitives et intégrales

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

IV.1 Primitives

Définition

Soit f une application continue de I dans E.

On dit qu'une application $F : I \to E$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Extension de la définition

On suppose seulement que $f : I \to E$ est continue par morceaux.

Une primitive de f est alors toute application $F : I \to E$, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de f.

Propriétés

- Soit f une application continue par morceaux de I dans E admettant une primitive F.

  Soit G une application de I dans E. G est une primitive de f sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante λ telle que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Dans ces conditions, si x_0 est un point de I et si u_0 est un élément quelconque de E, il existe une unique primitive G de f qui prend la valeur u_0 et x_0.

  Cette primitive est donnée par : $G = F - F(x_0) + u_0$.

Remarque

Pour l'instant, rien ne permet de dire si une application f continue par morceaux sur un intervale I y admet des primitives. Le théorème suivant donne la réponse.

IV.2 Le théorème fondamental

Théorème

Si f est continue par morceaux de I dans E, elle y admet des primitives.

Celle qui s'annule en en un point a de I est l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Pour toute primitive G de f , et pour tous points a, x de I, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.

Conséquence

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, alors : $\forall (a,x) \in I^2, \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Intégrale fonction de ses bornes)*

Soit f une application continue de I dans E. Soient u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs rélles, et telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

L'application G de J dans E définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sa dérivée est : $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

IV.3 Calcul des intégrales

Proposition *(Intégrales des fonctions paires ou impaires)*

On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à 0.

Soit f une application définie sur I, à valeurs dans E, continue par morceaux.

- Si f est paire alors : $\forall a \in I, \int_{-a}^{a} = 2\int_{0}^{a} f$.
- Si f est impaire alors : $\forall a \in I, \int_{-a}^{a} = 0$

Proposition *(Intégrales des fonctions périodiques)*

Soit $f : I \to E$ une application continue par morceaux et T-périodique.

- Pour tous réels a et b, pour tout entier relatif k $\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_{a}^{b} f$.
- Pour tous réels a et b, $\int_{a}^{a+T} f = \int_{b}^{b+T} f$.

Proposition *(Intégration par parties)*

Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$.

Remarques

- On utilise bien sûr la notation $[h]_a^b = h(b) - h(a)$.
- Le résultat s'étend au cas une application est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'autre dans E.

Proposition *(Intégrations par parties répétées)*

Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux.

$$\int_a^b fg^{(n)} = \left[fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-2}f^{(n-2)}g' + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}g'\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g.$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

Soit φ une application de J dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points a et b de J : $\displaystyle\int_a^b \varphi'(f\circ\varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

Remarques

– Avec la notation définitive de l'intégrale, l'égalité précédente s'écrit :

$\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$, où $c = \varphi(a)$ et $d = \varphi(b)$.

Pour l'utiliser on applique mécaniquement : $x = \varphi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Dans un sens, le passage de a, b à c, d est univoque.

Dans l'autre sens, il faut trouver a, b dans J tels que $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, ce qui est possible de manière unique si φ est bijective de I sur J.

– La formule s'étend au cas où f est seulement continue par morceaux, mais il est alors nécessaire que φ soit strictement monotone sur $[a, b]$.

IV.4 Le théorème du relèvement

Proposition

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = l\}$.

L'application $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est un *homéomorphisme* de $]-\pi, +\pi[$ sur $U - \{-l\}$, c'est-à-dire une bijection continue dont l'inverse est continue.

La bijection inverse est notée Arg et appelée fonction *argument*.

Pour tout $z = x + iy$ de U, avec $z \neq 1$, $Arg(z) = 2\arctan\dfrac{y}{1+x}$.

Théorème

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans U, avec $n \geq 1$.

Alors il existe une application θ de I dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$, telle que pour tout x de I : $f(x) = \exp(i\theta(x))$. On dit que l'application θ est un *relèvement* de f.

Remarques

– Avec les notations précédentes, θ n'est pas le seul relèvement de f.

En effet, pour tout entier relatif k, l'application $x \mapsto \theta(x) + 2k\pi$ convient encore.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021