V Accroissements finis et formules de Taylor

V.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que pour tout x de $]a,b[$, $\|f'(x)\| \leq M$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$.

Cas particulier

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$, avec $M = \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$.

Remarques

– L'inégalité des accroissements finis reste valable si f est seulement supposée continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$.

– Attention ! Le théorème de Rolle et l'*égalité* des accroissements finis ne sont valables que pour des applications à valeurs *réelles*.

Par exemple, l'application $f :\ t \mapsto \exp(it)$ est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$ et elle vérifie $f(0) = f(1)$.

Pourtant sa dérivée $f' :\ t \mapsto i\exp(it)$ ne s'annule jamais sur $]0,2\pi[$.

Proposition *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit f une application continue de I dans E, dérivable sur l'intérieur de I.
f est k-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I, $\|f'(x)\| \leq k$.

Proposition *(Prolongement d'une application dérivable)*

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que f' possède dans E une limite ℓ en a à droite.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $f'(a) = \ell$.

Remarque

On obtient un résultat analogue au point b de $[a,b]$.

Plus généralement, si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b]$, et si pour tout $k \leq n$ l'application $f^{(k)}$ admet une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

V.2 Formules de Taylor

Proposition *(Formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f : I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I.
Soit a un point de I. Alors pour tout x de I, $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

R_n est appelé le *reste d'ordre* n de la formule de Taylor de f au point a.

Proposition *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f : I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soient a et b deux points de I.
Alors : $\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où $M = \sup_{[a,b]} \left\| f^{n+1} \right\|$.

Remarques

- Si $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- En posant $h = b - a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang n s'écrit :
$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où } M = \sup_{[a,a+h]} \left\| f^{n+1} \right\|.$$

V.3 Application aux développements limités

Définition

Soit f une application de I dans E. Soient x_0 un point de I et n un entier naturel.
On dit que f possède un *développement limité* (un DL) d'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ vecteurs $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de E, et une application ε de I dans E tels que, pour tout x de I :
$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques et propriétés

- On note souvent $\mathrm{o}(x - x_0)^n$ plutôt que $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$.
- Si f possède un DL d'ordre n en x_0, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont uniques.
- Si f a un DL d'ordre n en x_0, elle a un DL en x_0 à tout ordre $p \leq n$, par *troncature*.
- f admet un DL d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en x_0.
  Ce DL s'écrit $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.
- f admet un DL d'ordre 1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0.
  Ce DL s'écrit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– f possède un DL d'ordre n en $x_0 \Leftrightarrow$ l'application g définie par $g(x) = f(x_0 + x)$ possède un DL d'ordre n en 0, et avec les mêmes coefficients.

Cette propriété permet de ramener tous les DL à l'origine.

Proposition *(DL obtenu par primitivation d'une application continue)*

Soit g une application continue de I dans E, admettant un DL d'ordre n en x_0 :
$g(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + o(x - x_0)^n$.
Alors toute primitive f de g admet un DL d'ordre $n + 1$ en x_0 :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 a_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o(x - x_0)^{n+1}.$$

Remarques

– On remarque que le DL de f est obtenu par intégration terme à terme de celui de g.

– La propriété précédente est vraie notamment si f est de classe $\mathcal{C}^1$: L'existence d'un DL d'ordre n pour f' prouve l'existence d'un DL d'ordre $n + 1$ pour sa primitive f.

– Dans un DL obtenu par primitivation, on n'oubliera pas la constante d'intégration !

Proposition *(Formule de Taylor-Young)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E.
Soit x_0 un point de I. Alors f possède un DL d'ordre n en x_0, sous la forme :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)^n.$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021