VI Intégrales dépendant d'un paramètre

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Proposition *(Continuité sous le signe d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application g définie sur I par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue.

Proposition *(Dérivation sous le signe d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f admet sur $I \times [a,b]$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue.

Alors l'application g définie sur I par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout x de I, $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ *(Formule de Leibniz.)*

Remarque

Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \times [a,b]$, alors g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$\forall k \in \{1,...,n\}, \forall x \in I, g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$.

Proposition *(Interversion de deux signes d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout segment $[c,d]$ inclus dans I, on a l'égalité :

$\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t$ *(Théorème de Fubini.)*