VI Intégrales dépendant d'un paramètre

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Proposition *(Continuité sous le signe d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application g définie sur I par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue.

Proposition *(Dérivation sous le signe d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f admet sur $I \times [a,b]$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue.

Alors l'application g définie sur I par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout x de I, $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ *(Formule de Leibniz.)*

Remarque

Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \times [a,b]$, alors g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$\forall k \in \{1,...,n\}, \forall x \in I, g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$

Proposition *(Interversion de deux signes d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout segment $[c,d]$ inclus dans I, on a l'égalité :

$\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ *(Théorème de Fubini.)*

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021