Équations différentielles linéaires

Sommaire

I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 2

I.1 Généralités 2

I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants 3

I.3 Exponentielles de matrices (compléments) 4

II "Equa diffs" linéaires scalaires d'ordre 1 6

II.1 Définitions 6

II.2 Solution générale de l'équation (E) 6

II.3 Méthode de variation de la constante 6

III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 7

III.1 Définitions 7

III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1 7

III.3 Problème de Cauchy 7

III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien 7

III.5 Méthode de variation des constantes 8

III.6 Cas où on connait une solution de (H) 8

III.7 Utilisation de séries entières 9

III.8 Cas des équations à coefficients constants 9

I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

NB : seuls les systèmes différentiels linéaires $X' = AX$, où A est une matrice constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont au programme de la classe PC. Tout le reste est en complément.

I.1 Généralités

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point, et n un entier naturel.
Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $t \mapsto B(t)$ une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
Soit $t \mapsto X(t)$ une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
On dit que l'application X est solution sur I du système $(S)\ :\ X' = A(t)X + B(t)$, si :
- L'application X est dérivable sur I.
- Pour tout t de I, on a l'égalité $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Remarques et définitions

- On dit que S est un système différentiel linéaire d'ordre 1.
- Le système $(H)\ :\ X' = A(t)X$ est appelé *système homogène* associé à (S).
- Toute solution de (S) ou de (H) sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition (Problème de Cauchy)

Le problème de Cauchy consiste à chercher s'il existe une solution $t \mapsto X(t)$ de (S) prenant en un point donné t_0 de I une valeur donnée X_0 dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Pour le système (S), et donc pour le système (H), le problème de Cauchy admet une solution unique, sur l'intervalle I tout entier.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (H))

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est un espace vectoriel de dimension n.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (S))

La solution générale de (S) s'obtient en ajoutant, à la solution générale de (H), une solution particulière X_0 de (S).

Conséquence

Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ forment une base de $\mathcal{S}_H$ la solution générale de (S) s'écrit donc :
$X : t \mapsto X_0(t) + \lambda_1 Z_1(t) + \lambda_2 Z_2(t) + \cdots + \lambda_n Z_n(t)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition (Principe de superposition des solutions)

On suppose que le "second membre" $B(t)$ de (S) s'écrit $B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \cdots + \alpha_k B_k(t)$, où les applications $B_1, \ldots, B_k$ sont continues de I dans $\mathbb{K}^n$, et où les α_j sont dans $\mathbb{K}$.

On suppose en outre que les applications $X_j : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ sont des solutions particulières du système $(S_j) \;:\; X' = A(t)X + B_j(t)$.

Alors l'application $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$ est une solution particulière de (S) sur I.

I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants

Si l'application matricielle $t \mapsto A(t)$ est constante, on dit que le système différentiel homogène (H) est à coefficients constants.

Si on note $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, et si A est la matrice de terme général a_{ij}, alors le système homogène (H) s'écrit :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) + \cdots + a_{1j}\, x_j(t) + \cdots + a_{1n}\, x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t) + \cdots + a_{2j}\, x_j(t) + \cdots + a_{2n}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i'(t) = a_{i1}\, x_1(t) + a_{i2}\, x_2(t) + \cdots + a_{ij}\, x_j(t) + \cdots + a_{in}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}\, x_1(t) + a_{n2}\, x_2(t) + \cdots + a_{nj}\, x_j(t) + \cdots + a_{nn}\, x_n(t) \end{cases}$$

Utilisation de la réduction de la matrice

- **Cas où la matrice du système est diagonalisable**

  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.
  Il existe donc une matrice diagonale D (de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) et une matrice P de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
  On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$.
  Le système (H) devient alors :

  $$(H') : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

  La k-ème ligne (L_k') de (H') s'écrit $y_k'(t) = \lambda_k y_k(t)$: c'est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 dont la solution générale est $y_k(t) = \alpha_k \exp(\lambda_k t)$, avec α_k dans $\mathbb{K}$.
  On trouve alors la solution générale de (H) en revenant à $X = PY$.
  Si on note $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs colonnes de P (qui sont vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$), la solution générale de (H) s'écrit :

  $$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) u_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) u_2 + \cdots + \alpha_n \exp(\lambda_n t) u_n$$

  où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$.
  On voit bien que $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et qu'une base de cet espace vectoriel est formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$, où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
  Remarque : Pour résoudre (H), le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

– **Diagonalisation dans $\mathbb{C}$, pour un système réel**
 On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (sans l'être dans $\mathbb{R}$) on peut résoudre (S) en utilisant la diagonalisation de A dans $\mathbb{C}$.
 Avec les notations précédentes, on range les valeurs propres de A pour que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \lambda_{2p} = \lambda_{2p-1}$ (valeurs propres non réelles), avec les vecteurs propres $u_2 = \overline{u_1}, \ldots, u_{2p} = \overline{u_{2p-1}}$, puis $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n$ (valeurs propres réelles).
 A partir de la base de $\mathcal{S}_H$ formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t)u_k$ (pour $1 \leq k \leq n$) on construit une base de solutions réelles de (H) de la manière suivante :
 Pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, on remplace φ_{2k} et $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$ par $\operatorname{Re}(\varphi_{2k})$ et par $\operatorname{Im}(\varphi_{2k})$.
 Pour tout $k > p$, on conserve les applications φ_k car elles sont à valeurs réelles.

– **Utilisation de la trigonalisation (complément)**
 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice A est (au besoin dans $\mathbb{C}$) trigonalisable.
 Il existe deux matrices, P inversible, et T triangulaire supérieure, (de coefficients diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A) telles que $T = P^{-1}AP$.
 Les systèmes (S) et (H) deviennent, en posant encore $X = PY$, et $C(t) = P^{-1}B(t)$:
 $(S') : Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$, et $(H) : Y'(t) = TY(t)$.
 La n-ième ligne (L'_n) de (S') est : $y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + c_n(t)$.
 La solution générale de (L'_n) s'écrit $y_n(t) = \alpha \exp(\lambda_n t) + \beta_n(t)$ (où α est dans $\mathbb{K}$ et où β est une solution particulière de (L'_n)).
 On résout alors progressivement (E') de la dernière équation à la première.
 On obtient enfin la solution générale de (E) en revenant à $X = PY$.
 Remarque : là encore, le calcul de P^{-1} est inutile pour résoudre (H).

I.3 Exponentielles de matrices (compléments)

Définition

> Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
> L'exponentielle de A est la limite, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de la suite de terme général $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k$.
> On note $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$.

Remarques et propriétés

– Pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda)I_n$. En particulier $\exp(0_n) = I_n$.
– Si A, B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
– En particulier, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est une matrice carrée inversible et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.
 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exp(A) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$, et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.
– Si $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = diag(\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n))$.

- L'application $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$ est dérivable, et $f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
- Supposons que A s'écrive $A = D + N$, avec D diagonale, N strictement triangulaire, et telles que $ND = DN$. Une telle décomposition apparaît quand on trigonalise A.

  Soit r un entier tel que $N^r = 0$.

  Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$.

Utilisation de $\exp(tA)$ dans la résolution de (H)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le système linéaire (H) : $X'(t) = AX(t)$.

Soit t_0 un réel, et X_0 un élément de $\mathbb{R}^n$.

L'unique solution de (H) qui vaut X_0 au point t_0 est : $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$.

II “Equa diffs” linéaires scalaires d’ordre 1

II.1 Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Soient a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que $x : I \to \mathbb{K}$ est solution de l’équation différentielle linéaire scalaire d’ordre 1

$$(E) : x' = a(t)\, x + b(t)$$

si l’application x est dérivable sur I et si, pour tout t de I, on a : $x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t)$.

L’équation $(H) : x' = a(t)\, x$ est appelée équation linéaire homogène associée.

Le cas d’une équation différentielle $a(t)\, x' + b(t)\, x + c(t) = 0$ se ramène au cas précédent, si on se place sur un intervalle sur lequel la fonction a ne s’annule pas.

II.2 Solution générale de l’équation (E)

- Le problème de Cauchy pour (E) admet une solution unique sur I.
  Autrement dit il existe une solution unique $t \mapsto x(t)$ sur I telle que $x(t_0) = x_0$, avec t_0 donné dans I et x_0 donné dans $\mathbb{K}$.
- La solution générale de léquation (E) s’écrit comme la somme d’une solution particulière de (E) et de la solution générale de léquation homogène (H).
- L’ensemble des solutions de (H) est une droite vectorielle qui est engendrée par l’application $t \mapsto \exp(A(t))$, où $t \mapsto A(t)$ est une primitive quelconque de $t \mapsto a(t)$.
- L’unique solution de (H) qui vaut x_0 en t_0 est $x(t) = x_0 \exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t)\, \mathrm{d}t$.
- Quand l’équation homogène est écrite sous la forme $a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$, et à condition de se placer sur un intervalle sur lequel $t \mapsto a(t)$ ne s’annule pas, alors la solution générale de (H) est $x \mapsto \lambda \exp A(t)$, où A est une primitive de $-\dfrac{b}{a}$ et où λ est un élément quelconque de $\mathbb{K}$.

II.3 Méthode de variation de la constante

- Soit $t \mapsto h(t)$ une solution non nulle de l’équation (H).
  Rappelons qu’une telle solution ne s’annule en aucun point de I (problème de Cauchy).
- On cherche des solutions de (E) sous la forme $t \mapsto x(t) = \lambda(t)h(t)$, où λ est dérivable.
  Dire qu’une telle fonction x est solution de (E) sur I équivaut à : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) = b(t)$.
- Si $t \mapsto \mu(t)$ est une primitive de l’application $t \mapsto \dfrac{b(t)}{h(t)}$, on en déduit $\lambda(t) = \mu(t) + \alpha$.
  On trouve des solutions de (E) sur I en écrivant : $x(t) = (\mu(t) + \alpha)h(t) = \mu(t)h(t) + \alpha h(t)$.
- Dans cette écriture, μh est une solution particulière de (E), correspondant au cas $\alpha = 0$, et αh est la solution générale de (H). On obtient donc ainsi toutes les solutions de (E) sur I.

III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

III.1 Définitions

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Soient a, b, c trois applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  On note $x :\ t \mapsto x(t)$ la fonction inconnue, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On considère ici les équations :
  $(E) :\ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$, et $(H) :\ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0$.
  (E) est appelée une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.
  On dit que (H) est l'équation linéaire homogène associée à (E).
- Les solutions de (E) et (H) sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1

- Soit $t \mapsto x(t)$ une application définie sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On lui associe l'application $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.
- Alors l'équation (E) équivaut au système :

$$(S) :\ \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

  qui est du type $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
  De même l'équation (H) équivaut au système homogène $(S_H) :\ X'(t) = AX(t)$.

III.3 Problème de Cauchy

Proposition

Soit (t_0, x_0, m) un triplet quelconque de $I \times \mathbb{K}$.
L'équation (E) possède une solution et une seule qui vérifie $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = m$.
L'intervalle de définition de cette solution est I tout entier.

Interprétation

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe donc une unique "courbe intégrale" qui passe par le point (x_0, y_0) avec une tangente de coefficient directeur m, et cette courbe intégrale est "définie" sur tout I.

III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien

Proposition

Pour tout t_0 de I, l'application $h \mapsto (h(t_0), h'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.
L'ensemble des solutions de (H) est donc un plan vectoriel, inclus dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$).

Définition

Soient h et k deux solutions de (H).

Le *wronskien* de h et k est l'application W définie sur I par : $\forall t \in I, W(t) = \begin{vmatrix} h(t) & k(t) \\ h'(t) & k'(t) \end{vmatrix}$.

Proposition

Deux solutions h, k de (H) forment une base de $\mathcal{S}(H))$ si et seulement si leur wronskien $W(t)$ est non nul en un point : il est alors non nul en tout point.

Remarques

- Comme d'habitude, la solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de (H) à une solution particulière de (E).
- Si h, k est une base de solutions de (H), et si y_0 est une solution particulière de (E), la solution générale de (E) s'écrit donc : $y(t) \equiv y_0(t) + \lambda h(t) + \mu k(t)$.

III.5 Méthode de variation des constantes

Proposition

Soit h, k une base de solutions de l'équation homogène (H).
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple (λ, μ) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :
$\forall t \in I, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} k(t) \\ k'(t) \end{pmatrix}$.
Le couple (λ, μ) vérifie : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.

- La méthode de variation des constantes consiste à chercher la solution générale $x(t)$ de (E), à partir d'un système fondamental h, k de solutions de (H), en cherchant $x(t)$ sous la forme suivante : $\forall t \in I, x(t) = \lambda(t)h(t) + \mu(t)k(t)$,
  et avec la condition supplémentaire : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.
- Quand on exprime qu'une telle fonction x est solution de (E), on est conduit au système :
  $\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)h'(t) + \mu'(t)k'(t) = c(t) \\ \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0 \end{cases}$
- Pour tout t de I, ce système possède une solution unique $(\lambda'(t), \mu'(t))$.
  Il ne reste plus qu'à primitiver $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, pour obtenir la solution générale de (E).

III.6 Cas où on connait une solution de (H)

- Il n'y a pas de méthode générale permettant de trouver une base de solutions de (H) (sauf cas particulier). Mais supposons connue une solution h de (H), ne s'annulant pas sur un sous-intervalle J de I.
  On peut alors chercher les solutions $t \mapsto x(t)$ de (E) sur J, en effectuant le changement de fonction inconnue définie par : $x(t) = h(t)y(t)$.

– Avec ces notations, la fonction x est solution de (E) sur l'intervalle J si et seulement si, pour tout t de J :
$$y''(t) + \left(2\frac{h'(t)}{h(t)} + a(t)\right) y'(t) = \frac{c(t)}{h(t)}$$
Le changement $z = y'(t)$ ramène alors à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

III.7 Utilisation de séries entières

– Dans certains cas, on cherche une solution de (E) (ou de (H)) qui soit développable en série entière au voisinage de l'origine.
– Pour que cela soit possible, il faut que les coefficients $a(t), b(t), c(t)$ de l'équation soient eux-mêmes développables en série entière.
Un cas fréquent est celui où $a(t), b(t), c(t)$ sont des polynômes.
– On injecte alors dans (E) le développement de $x(t)$, dont on suppose à priori que le rayon de convergence R est strictement positif, les coefficients a_n étant indéterminés.
On regroupe les termes par degrés, et on identifie.
Cette identification permet de le plus souvent de trouver des relations de récurrence entre les coefficients a_n et de les calculer (éventuellement en fonction d'un ou de deux d'entre eux, par exemple a_0 ou a_1, qui resteraient alors indéterminés).
On vérifie enfin que le rayon de convergence est strictement positif.
– Si possible, on exprime cette série entière à l'aide de fonctions élémentaires.

III.8 Cas des équations à coefficients constants

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

Soit $t \mapsto c(t)$ une application continue, de I dans $\mathbb{K}$.

On considère ici les équations différentielles $\begin{cases} (E): \ x" + ax' + bx = c(t) \\ (H): \ x" + ax' + bx = 0 \end{cases}$

Le système linéaire associé à (E) s'écrit
$$(S) \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de ce système est : $\chi = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + a\lambda + b$.

L'équation $(\mathcal{C})$: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (E) et de (H).

Résolution de (H)

– **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**
Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de $(\mathcal{C})$.
◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2.
Une base de solutions de (H) est $t \mapsto \exp(\lambda_1 t)$, $t \mapsto \exp(\lambda_2 t)$.
◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a une solution double λ.
Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\lambda t)$ et $t \mapsto t\exp(\lambda t)$.

- **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**
  - ◇ Si $\Delta = 0$ voir ci-dessus.
  - ◇ Si $\Delta > 0$ voir le cas $\Delta \neq 0$ ci-dessus.
  - ◇ Si $\Delta < 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions non réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
    Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, et $t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$.
- **Cas d'un second membre du type** $\exp(\alpha t)P(t)$

  Soient α un élément de $\mathbb{K}$, et P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

  On considère l'équation (E) : $x'' + ax' + bx = \exp(\alpha t)P(t)$,
  - ◇ Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ◇ Si α est racine simple de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)tQ(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ◇ Si α est racine double de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)t^2Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P.