Équations différentielles linéaires

Sommaire

I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 2
I.1 Généralités 2
I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants 3
I.3 Exponentielles de matrices (compléments) 4
II "Equa diffs" linéaires scalaires d'ordre 1 6
II.1 Définitions 6
II.2 Solution générale de l'équation (E) 6
II.3 Méthode de variation de la constante 6
III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 7
III.1 Définitions 7
III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1 7
III.3 Problème de Cauchy 7
III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien 7
III.5 Méthode de variation des constantes 8
III.6 Cas où on connait une solution de (H) 8
III.7 Utilisation de séries entières 9
III.8 Cas des équations à coefficients constants 9

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

NB : seuls les systèmes différentiels linéaires $X' = AX$, où A est une matrice constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont au programme de la classe PC. Tout le reste est en complément.

I.1 Généralités

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point, et n un entier naturel.
Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $t \mapsto B(t)$ une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
Soit $t \mapsto X(t)$ une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
On dit que l'application X est solution sur I du système (S) : $X' = A(t)X + B(t)$, si :
– L'application X est dérivable sur I.
– Pour tout t de I, on a l'égalité $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Remarques et définitions

– On dit que S est un système différentiel linéaire d'ordre 1.
– Le système (H) : $X' = A(t)X$ est appelé *système homogène* associé à (S).
– Toute solution de (S) ou de (H) sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition (Problème de Cauchy)

Le problème de Cauchy consiste à chercher s'il existe une solution $t \mapsto X(t)$ de (S) prenant en un point donné t_0 de I une valeur donnée X_0 dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Pour le système (S), et donc pour le système (H), le problème de Cauchy admet une solution unique, sur l'intervalle I tout entier.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (H))

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est un espace vectoriel de dimension n.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (S))

La solution générale de (S) s'obtient en ajoutant, à la solution générale de (H), une solution particulière X_0 de (S).

Conséquence

Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ forment une base de $\mathcal{S}_H$ la solution générale de (S) s'écrit donc :
$X : t \mapsto X_0(t) + \lambda_1 Z_1(t) + \lambda_2 Z_2(t) + \cdots + \lambda_n Z_n(t)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition (Principe de superposition des solutions)

On suppose que le "second membre" $B(t)$ de (S) s'écrit $B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \cdots + \alpha_k B_k(t)$, où les applications $B_1, \ldots, B_k$ sont continues de I dans $\mathbb{K}^n$, et où les α_j sont dans $\mathbb{K}$.

On suppose en outre que les applications $X_j : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ sont des solutions particulières du système (S_j) : $X' = A(t)X + B_j(t)$.

Alors l'application $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$ est une solution particulière de (S) sur I.

I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants

Si l'application matricielle $t \mapsto A(t)$ est constante, on dit que le système différentiel homogène (H) est à coefficients constants.

Si on note $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, et si A est la matrice de terme général a_{ij}, alors le système homogène (H) s'écrit :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) + \cdots + a_{1j}\, x_j(t) + \cdots + a_{1n}\, x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t) + \cdots + a_{2j}\, x_j(t) + \cdots + a_{2n}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i'(t) = a_{i1}\, x_1(t) + a_{i2}\, x_2(t) + \cdots + a_{ij}\, x_j(t) + \cdots + a_{in}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}\, x_1(t) + a_{n2}\, x_2(t) + \cdots + a_{nj}\, x_j(t) + \cdots + a_{nn}\, x_n(t) \end{cases}$$

Utilisation de la réduction de la matrice

– **Cas où la matrice du système est diagonalisable**

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Il existe donc une matrice diagonale D (de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) et une matrice P de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$.

Le système (H) devient alors :

$$(H') : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

La k-ème ligne (L_k') de (H') s'écrit $y_k'(t) = \lambda_k y_k(t)$: c'est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 dont la solution générale est $y_k(t) = \alpha_k \exp(\lambda_k t)$, avec α_k dans $\mathbb{K}$.

On trouve alors la solution générale de (H) en revenant à $X = PY$.

Si on note $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs colonnes de P (qui sont vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$), la solution générale de (H) s'écrit :

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)u_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)u_2 + \cdots + \alpha_n \exp(\lambda_n t)u_n$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$.

On voit bien que $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et qu'une base de cet espace vectoriel est formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t)u_k$, où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Remarque : Pour résoudre (H), le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– **Diagonalisation dans $\mathbb{C}$, pour un système réel**

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (sans l'être dans $\mathbb{R}$) on peut résoudre (S) en utilisant la diagonalisation de A dans $\mathbb{C}$.

Avec les notations précédentes, on range les valeurs propres de A pour que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \lambda_{2p} = \lambda_{2p-1}$ (valeurs propres non réelles), avec les vecteurs propres $u_2 = \overline{u_1}, \dots, u_{2p} = \overline{u_{2p-1}}$, puis $\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n$ (valeurs propres réelles).

A partir de la base de $\mathcal{S}_H$ formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t)u_k$ (pour $1 \leq k \leq n$) on construit une base de solutions réelles de (H) de la manière suivante :

Pour tout k de $\{1, \dots, p\}$, on remplace φ_{2k} et $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$ par $\mathrm{Re}\,(\varphi_{2k})$ et par $\mathrm{Im}\,(\varphi_{2k})$.

Pour tout $k > p$, on conserve les applications φ_k car elles sont à valeurs réelles.

– **Utilisation de la trigonalisation (complément)**

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice A est (au besoin dans $\mathbb{C}$) trigonalisable.

Il existe deux matrices, P inversible, et T triangulaire supérieure, (de coefficients diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A) telles que $T = P^{-1}AP$.

Les systèmes (S) et (H) deviennent, en posant encore $X = PY$, et $C(t) = P^{-1}B(t)$:

$(S') : Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$, et $(H) : Y'(t) = TY(t)$.

La n-ième ligne (L'_n) de (S') est : $y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + c_n(t)$.

La solution générale de (L'_n) s'écrit $y_n(t) = \alpha \exp(\lambda_n t) + \beta_n(t)$ (où α est dans $\mathbb{K}$ et où β est une solution particulière de (L'_n)).

On résout alors progressivement (E') de la dernière équation à la première.

On obtient enfin la solution générale de (E) en revenant à $X = PY$.

Remarque : là encore, le calcul de P^{-1} est inutile pour résoudre (H).

I.3 Exponentielles de matrices (compléments)

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'exponentielle de A est la limite, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de la suite de terme général $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k$.

On note $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$.

Remarques et propriétés

– Pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda)I_n$. En particulier $\exp(0_n) = I_n$.

– Si A, B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

– En particulier, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est une matrice carrée inversible et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exp(A) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$, et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.

– Si $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = diag(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– L'application $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$ est dérivable, et $f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
– Supposons que A s'écrive $A = D + N$, avec D diagonale, N strictement triangulaire, et telles que $ND = DN$. Une telle décomposition apparaît quand on trigonalise A.
Soit r un entier tel que $N^r = 0$.
Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)\sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$.

Utilisation de $\exp(tA)$ dans la résolution de (H)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le système linéaire $(H) : X'(t) = AX(t)$.

Soit t_0 un réel, et X_0 un élément de $\mathbb{R}^n$.

L'unique solution de (H) qui vaut X_0 au point t_0 est : $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II "Equa diffs" linéaires scalaires d'ordre 1

II.1 Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Soient a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que $x : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1

$$(E) : x' = a(t)\,x + b(t)$$

si l'application x est dérivable sur I et si, pour tout t de I, on a : $x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$.

L'équation $(H) : x' = a(t)\,x$ est appelée équation linéaire homogène associée.

Le cas d'une équation différentielle $a(t)\,x' + b(t)\,x + c(t) = 0$ se ramène au cas précédent, si on se place sur un intervalle sur lequel la fonction a ne s'annule pas.

II.2 Solution générale de l'équation (E)

- Le problème de Cauchy pour (E) admet une solution unique sur I.
  Autrement dit il existe une solution unique $t \mapsto x(t)$ sur I telle que $x(t_0) = x_0$, avec t_0 donné dans I et x_0 donné dans $\mathbb{K}$.
- La solution générale de léquation (E) s'écrit comme la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de léquation homogène (H).
- L'ensemble des solutions de (H) est une droite vectorielle qui est engendrée par l'application $t \mapsto \exp(A(t))$, où $t \mapsto A(t)$ est une primitive quelconque de $t \mapsto a(t)$.
- L'unique solution de (H) qui vaut x_0 en t_0 est $x(t) = x_0 \exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t$.
- Quand l'équation homogène est écrite sous la forme $a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$, et à condition de se placer sur un intervalle sur lequel $t \mapsto a(t)$ ne s'annule pas, alors la solution générale de (H) est $x \mapsto \lambda \exp A(t)$, où A est une primitive de $-\dfrac{b}{a}$ et où λ est un élément quelconque de $\mathbb{K}$.

II.3 Méthode de variation de la constante

- Soit $t \mapsto h(t)$ une solution non nulle de l'équation (H).
  Rappelons qu'une telle solution ne s'annule en aucun point de I (problème de Cauchy).
- On cherche des solutions de (E) sous la forme $t \mapsto x(t) = \lambda(t)h(t)$, où λ est dérivable.
  Dire qu'une telle fonction x est solution de (E) sur I équivaut à : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) = b(t)$.
- Si $t \mapsto \mu(t)$ est une primitive de l'application $t \mapsto \dfrac{b(t)}{h(t)}$, on en déduit $\lambda(t) = \mu(t) + \alpha$.
  On trouve des solutions de (E) sur I en écrivant : $x(t) = (\mu(t) + \alpha)h(t) = \mu(t)h(t) + \alpha h(t)$.
- Dans cette écriture, μh est une solution particulière de (E), correspondant au cas $\alpha = 0$, et αh est la solution générale de (H). On obtient donc ainsi toutes les solutions de (E) sur I.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

III.1 Définitions

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Soient a, b, c trois applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  On note $x :\ t \mapsto x(t)$ la fonction inconnue, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On considère ici les équations :
  $(E) :\ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$, et $(H) :\ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0$.
  (E) est appelée une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.
  On dit que (H) est l'équation linéaire homogène associée à (E).
- Les solutions de (E) et (H) sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1

- Soit $t \mapsto x(t)$ une application définie sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On lui associe l'application $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.
- Alors l'équation (E) équivaut au système :

$$(S) :\ \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

  qui est du type $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
  De même l'équation (H) équivaut au système homogène $(S_H) :\ X'(t) = AX(t)$.

III.3 Problème de Cauchy

Proposition

Soit (t_0, x_0, m) un triplet quelconque de $I \times \mathbb{K}$.
L'équation (E) possède une solution et une seule qui vérifie $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = m$.
L'intervalle de définition de cette solution est I tout entier.

Interprétation

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe donc une unique "courbe intégrale" qui passe par le point (x_0, y_0) avec une tangente de coefficient directeur m, et cette courbe intégrale est "définie" sur tout I.

III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien

Proposition

Pour tout t_0 de I, l'application $h \mapsto (h(t_0), h'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.
L'ensemble des solutions de (H) est donc un plan vectoriel, inclus dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}))$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition

Soient h et k deux solutions de (H).

Le *wronskien* de h et k est l'application W définie sur I par : $\forall t \in I, W(t) = \begin{vmatrix} h(t) & k(t) \\ h'(t) & k'(t) \end{vmatrix}$.

Proposition

Deux solutions h, k de (H) forment une base de $\mathcal{S}(H))$ si et seulement si leur wronskien $W(t)$ est non nul en un point : il est alors non nul en tout point.

Remarques

- Comme d'habitude, la solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de (H) à une solution particulière de (E).
- Si h, k est une base de solutions de (H), et si y_0 est une solution particulière de (E), la solution générale de (E) s'écrit donc : $y(t) \equiv y_0(t) + \lambda h(t) + \mu k(t)$.

III.5 Méthode de variation des constantes

Proposition

Soit h, k une base de solutions de l'équation homogène (H).
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple (λ, μ) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :
$\forall t \in I, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} k(t) \\ k'(t) \end{pmatrix}$.
Le couple (λ, μ) vérifie : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.

- La méthode de variation des constantes consiste à chercher la solution générale $x(t)$ de (E), à partir d'un système fondamental h, k de solutions de (H), en cherchant $x(t)$ sous la forme suivante : $\forall t \in I, x(t) = \lambda(t)h(t) + \mu(t)k(t)$,
et avec la condition supplémentaire : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.
- Quand on exprime qu'une telle fonction x est solution de (E), on est conduit au système :
$\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)h'(t) + \mu'(t)k'(t) = c(t) \\ \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0 \end{cases}$
- Pour tout t de I, ce système possède une solution unique $(\lambda'(t), \mu'(t))$.
Il ne reste plus qu'à primitiver $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, pour obtenir la solution générale de (E).

III.6 Cas où on connait une solution de (H)

- Il n'y a pas de méthode générale permettant de trouver une base de solutions de (H) (sauf cas particulier). Mais supposons connue une solution h de (H), ne s'annulant pas sur un sous-intervalle J de I.
On peut alors chercher les solutions $t \mapsto x(t)$ de (E) sur J, en effectuant le changement de fonction inconnue définie par : $x(t) = h(t)y(t)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– Avec ces notations, la fonction x est solution de (E) sur l'intervalle J si et seulement si, pour tout t de J :
$$y''(t) + \left(2\frac{h'(t)}{h(t)} + a(t)\right) y'(t) = \frac{c(t)}{h(t)}$$
Le changement $z = y'(t)$ ramène alors à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

III.7 Utilisation de séries entières

– Dans certains cas, on cherche une solution de (E) (ou de (H)) qui soit développable en série entière au voisinage de l'origine.
– Pour que cela soit possible, il faut que les coefficients $a(t), b(t), c(t)$ de l'équation soient eux-mêmes développables en série entière.
Un cas fréquent est celui où $a(t), b(t), c(t)$ sont des polynômes.
– On injecte alors dans (E) le développement de $x(t)$, dont on suppose à priori que le rayon de convergence R est strictement positif, les coefficients a_n étant indéterminés.
On regroupe les termes par degrés, et on identifie.
Cette identification permet de le plus souvent de trouver des relations de récurrence entre les coefficients a_n et de les calculer (éventuellement en fonction d'un ou de deux d'entre eux, par exemple a_0 ou a_1, qui resteraient alors indéterminés).
On vérifie enfin que le rayon de convergence est strictement positif.
– Si possible, on exprime cette série entière à l'aide de fonctions élémentaires.

III.8 Cas des équations à coefficients constants

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.
Soit $t \mapsto c(t)$ une application continue, de I dans $\mathbb{K}$.
On considère ici les équations différentielles $\begin{cases} (E) : \ x'' + ax' + bx = c(t) \\ (H) : \ x'' + ax' + bx = 0 \end{cases}$

Le système linéaire associé à (E) s'écrit
$$(S) \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de ce système est : $\chi = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + a\lambda + b$.
L'équation $(\mathcal{C}) : \ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (E) et de (H).

Résolution de (H)

– **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**
Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de $(\mathcal{C})$.
◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2.
Une base de solutions de (H) est $t \mapsto \exp(\lambda_1 t)$, $t \mapsto \exp(\lambda_2 t)$.
◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a une solution double λ.
Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\lambda t)$ et $t \mapsto t\exp(\lambda t)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**
  - ◇ Si $\Delta = 0$ voir ci-dessus.
  - ◇ Si $\Delta > 0$ voir le cas $\Delta \neq 0$ ci-dessus.
  - ◇ Si $\Delta < 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions non réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
    Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, et $t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$.
- **Cas d'un second membre du type** $\exp(\alpha t)P(t)$
  Soient α un élément de $\mathbb{K}$, et P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  On considère l'équation (E) : $x'' + ax' + bx = \exp(\alpha t)P(t)$,
  - ◇ Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ◇ Si α est racine simple de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)tQ(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ◇ Si α est racine double de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)t^2Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021