I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

NB : seuls les systèmes différentiels linéaires $X' = AX$, où A est une matrice constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont au programme de la classe PC. Tout le reste est en complément.

I.1 Généralités

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point, et n un entier naturel.
Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $t \mapsto B(t)$ une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
Soit $t \mapsto X(t)$ une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
On dit que l'application X est solution sur I du système (S) : $X' = A(t)X + B(t)$, si :
– L'application X est dérivable sur I.
– Pour tout t de I, on a l'égalité $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Remarques et définitions

– On dit que S est un système différentiel linéaire d'ordre 1.
– Le système (H) : $X' = A(t)X$ est appelé *système homogène* associé à (S).
– Toute solution de (S) ou de (H) sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition (Problème de Cauchy)

Le problème de Cauchy consiste à chercher s'il existe une solution $t \mapsto X(t)$ de (S) prenant en un point donné t_0 de I une valeur donnée X_0 dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Pour le système (S), et donc pour le système (H), le problème de Cauchy admet une solution unique, sur l'intervalle I tout entier.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (H))

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est un espace vectoriel de dimension n.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (S))

La solution générale de (S) s'obtient en ajoutant, à la solution générale de (H), une solution particulière X_0 de (S).

Conséquence

Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ forment une base de $\mathcal{S}_H$ la solution générale de (S) s'écrit donc :
$X : t \mapsto X_0(t) + \lambda_1 Z_1(t) + \lambda_2 Z_2(t) + \cdots + \lambda_n Z_n(t)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition (Principe de superposition des solutions)

On suppose que le "second membre" $B(t)$ de (S) s'écrit $B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \cdots + \alpha_k B_k(t)$, où les applications $B_1, \ldots, B_k$ sont continues de I dans $\mathbb{K}^n$, et où les α_j sont dans $\mathbb{K}$.

On suppose en outre que les applications $X_j : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ sont des solutions particulières du système (S_j) : $X' = A(t)X + B_j(t)$.

Alors l'application $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$ est une solution particulière de (S) sur I.

I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants

Si l'application matricielle $t \mapsto A(t)$ est constante, on dit que le système différentiel homogène (H) est à coefficients constants.

Si on note $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, et si A est la matrice de terme général a_{ij}, alors le système homogène (H) s'écrit :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) + \cdots + a_{1j}\, x_j(t) + \cdots + a_{1n}\, x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t) + \cdots + a_{2j}\, x_j(t) + \cdots + a_{2n}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i'(t) = a_{i1}\, x_1(t) + a_{i2}\, x_2(t) + \cdots + a_{ij}\, x_j(t) + \cdots + a_{in}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}\, x_1(t) + a_{n2}\, x_2(t) + \cdots + a_{nj}\, x_j(t) + \cdots + a_{nn}\, x_n(t) \end{cases}$$

Utilisation de la réduction de la matrice

– **Cas où la matrice du système est diagonalisable**

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Il existe donc une matrice diagonale D (de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) et une matrice P de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$.

Le système (H) devient alors :

$$(H') : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

La k-ème ligne (L_k') de (H') s'écrit $y_k'(t) = \lambda_k y_k(t)$: c'est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 dont la solution générale est $y_k(t) = \alpha_k \exp(\lambda_k t)$, avec α_k dans $\mathbb{K}$.

On trouve alors la solution générale de (H) en revenant à $X = PY$.

Si on note $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs colonnes de P (qui sont vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$), la solution générale de (H) s'écrit :

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)u_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)u_2 + \cdots + \alpha_n \exp(\lambda_n t)u_n$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$.

On voit bien que $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et qu'une base de cet espace vectoriel est formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t)u_k$, où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Remarque : Pour résoudre (H), le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– **Diagonalisation dans $\mathbb{C}$, pour un système réel**

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (sans l'être dans $\mathbb{R}$) on peut résoudre (S) en utilisant la diagonalisation de A dans $\mathbb{C}$.

Avec les notations précédentes, on range les valeurs propres de A pour que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \lambda_{2p} = \lambda_{2p-1}$ (valeurs propres non réelles), avec les vecteurs propres $u_2 = \overline{u_1}, \dots, u_{2p} = \overline{u_{2p-1}}$, puis $\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n$ (valeurs propres réelles).

A partir de la base de $\mathcal{S}_H$ formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t)u_k$ (pour $1 \leq k \leq n$) on construit une base de solutions réelles de (H) de la manière suivante :

Pour tout k de $\{1, \dots, p\}$, on remplace φ_{2k} et $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$ par $\mathrm{Re}\,(\varphi_{2k})$ et par $\mathrm{Im}\,(\varphi_{2k})$.

Pour tout $k > p$, on conserve les applications φ_k car elles sont à valeurs réelles.

– **Utilisation de la trigonalisation (complément)**

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice A est (au besoin dans $\mathbb{C}$) trigonalisable.

Il existe deux matrices, P inversible, et T triangulaire supérieure, (de coefficients diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A) telles que $T = P^{-1}AP$.

Les systèmes (S) et (H) deviennent, en posant encore $X = PY$, et $C(t) = P^{-1}B(t)$:

$(S') : Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$, et $(H) : Y'(t) = TY(t)$.

La n-ième ligne (L'_n) de (S') est : $y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + c_n(t)$.

La solution générale de (L'_n) s'écrit $y_n(t) = \alpha \exp(\lambda_n t) + \beta_n(t)$ (où α est dans $\mathbb{K}$ et où β est une solution particulière de (L'_n)).

On résout alors progressivement (E') de la dernière équation à la première.

On obtient enfin la solution générale de (E) en revenant à $X = PY$.

Remarque : là encore, le calcul de P^{-1} est inutile pour résoudre (H).

I.3 Exponentielles de matrices (compléments)

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'exponentielle de A est la limite, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de la suite de terme général $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k$.

On note $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$.

Remarques et propriétés

– Pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda)I_n$. En particulier $\exp(0_n) = I_n$.

– Si A, B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

– En particulier, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est une matrice carrée inversible et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exp(A) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$, et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.

– Si $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = diag(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– L'application $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$ est dérivable, et $f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
– Supposons que A s'écrive $A = D + N$, avec D diagonale, N strictement triangulaire, et telles que $ND = DN$. Une telle décomposition apparaît quand on trigonalise A.
Soit r un entier tel que $N^r = 0$.
Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)\sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$.

Utilisation de $\exp(tA)$ dans la résolution de (H)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le système linéaire $(H) : X'(t) = AX(t)$.

Soit t_0 un réel, et X_0 un élément de $\mathbb{R}^n$.

L'unique solution de (H) qui vaut X_0 au point t_0 est : $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021