



II “Equa diffs” linéaires scalaires d’ordre 1

II.1 Définitions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , non réduit à un point.

Soient a et b deux fonctions continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On dit que $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ est solution de l’équation différentielle linéaire scalaire d’ordre 1

$$(E) : x' = a(t)x + b(t)$$

si l’application x est dérivable sur I et si, pour tout t de I , on a : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

L’équation $(H) : x' = a(t)x$ est appelée équation linéaire homogène associée.

Le cas d’une équation différentielle $a(t)x' + b(t)x + c(t) = 0$ se ramène au cas précédent, si on se place sur un intervalle sur lequel la fonction a ne s’annule pas.

II.2 Solution générale de l’équation (E)

- Le problème de Cauchy pour (E) admet une solution unique sur I .
Autrement dit il existe une solution unique $t \mapsto x(t)$ sur I telle que $x(t_0) = x_0$, avec t_0 donné dans I et x_0 donné dans \mathbb{K} .
- La solution générale de l’équation (E) s’écrit comme la somme d’une solution particulière de (E) et de la solution générale de l’équation homogène (H) .
- L’ensemble des solutions de (H) est une droite vectorielle qui est engendrée par l’application $t \mapsto \exp(A(t))$, où $t \mapsto A(t)$ est une primitive quelconque de $t \mapsto a(t)$.
- L’unique solution de (H) qui vaut x_0 en t_0 est $x(t) = x_0 \exp \int_{t_0}^t a(t) dt$.
- Quand l’équation homogène est écrite sous la forme $a(t)x' + b(t)x = 0$, et à condition de se placer sur un intervalle sur lequel $t \mapsto a(t)$ ne s’annule pas, alors la solution générale de (H) est $x \mapsto \lambda \exp A(t)$, où A est une primitive de $-\frac{b}{a}$ et où λ est un élément quelconque de \mathbb{K} .

II.3 Méthode de variation de la constante

- Soit $t \mapsto h(t)$ une solution non nulle de l’équation (H) .
Rappelons qu’une telle solution ne s’annule en aucun point de I (problème de Cauchy).
- On cherche des solutions de (E) sous la forme $t \mapsto x(t) = \lambda(t)h(t)$, où λ est dérivable.
Dire qu’une telle fonction x est solution de (E) sur I équivaut à : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) = b(t)$.
- Si $t \mapsto \mu(t)$ est une primitive de l’application $t \mapsto \frac{b(t)}{h(t)}$, on en déduit $\lambda(t) = \mu(t) + \alpha$.
On trouve des solutions de (E) sur I en écrivant : $x(t) = (\mu(t) + \alpha)h(t) = \mu(t)h(t) + \alpha h(t)$.
- Dans cette écriture, μh est une solution particulière de (E) , correspondant au cas $\alpha = 0$, et αh est la solution générale de (H) . On obtient donc ainsi toutes les solutions de (E) sur I .