II "Equa diffs" linéaires scalaires d'ordre 1

II.1 Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Soient a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que $x : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1

$$(E) : x' = a(t)\,x + b(t)$$

si l'application x est dérivable sur I et si, pour tout t de I, on a : $x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$.

L'équation $(H) : x' = a(t)\,x$ est appelée équation linéaire homogène associée.

Le cas d'une équation différentielle $a(t)\,x' + b(t)\,x + c(t) = 0$ se ramène au cas précédent, si on se place sur un intervalle sur lequel la fonction a ne s'annule pas.

II.2 Solution générale de l'équation (E)

- Le problème de Cauchy pour (E) admet une solution unique sur I.
  Autrement dit il existe une solution unique $t \mapsto x(t)$ sur I telle que $x(t_0) = x_0$, avec t_0 donné dans I et x_0 donné dans $\mathbb{K}$.
- La solution générale de léquation (E) s'écrit comme la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de léquation homogène (H).
- L'ensemble des solutions de (H) est une droite vectorielle qui est engendrée par l'application $t \mapsto \exp(A(t))$, où $t \mapsto A(t)$ est une primitive quelconque de $t \mapsto a(t)$.
- L'unique solution de (H) qui vaut x_0 en t_0 est $x(t) = x_0 \exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t$.
- Quand l'équation homogène est écrite sous la forme $a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$, et à condition de se placer sur un intervalle sur lequel $t \mapsto a(t)$ ne s'annule pas, alors la solution générale de (H) est $x \mapsto \lambda \exp A(t)$, où A est une primitive de $-\dfrac{b}{a}$ et où λ est un élément quelconque de $\mathbb{K}$.

II.3 Méthode de variation de la constante

- Soit $t \mapsto h(t)$ une solution non nulle de l'équation (H).
  Rappelons qu'une telle solution ne s'annule en aucun point de I (problème de Cauchy).
- On cherche des solutions de (E) sous la forme $t \mapsto x(t) = \lambda(t)h(t)$, où λ est dérivable.
  Dire qu'une telle fonction x est solution de (E) sur I équivaut à : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) = b(t)$.
- Si $t \mapsto \mu(t)$ est une primitive de l'application $t \mapsto \dfrac{b(t)}{h(t)}$, on en déduit $\lambda(t) = \mu(t) + \alpha$.
  On trouve des solutions de (E) sur I en écrivant : $x(t) = (\mu(t) + \alpha)h(t) = \mu(t)h(t) + \alpha h(t)$.
- Dans cette écriture, μh est une solution particulière de (E), correspondant au cas $\alpha = 0$, et αh est la solution générale de (H). On obtient donc ainsi toutes les solutions de (E) sur I.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021