I Espaces vectoriels normés

I.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $N: E \to \mathbb{R}$ est une *norme* si :
– $\forall u \in E, N(u) \geq 0, \quad$ et $\quad N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
– $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$.
– $\forall (u, v) \in E^2, N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire)*
On note en général $\|u\|$ plutôt que $N(u)$.
L'espace E, muni de la norme $u \mapsto \|u\|$ est appelé un *espace vectoriel normé*.

Définition

Si E est une algèbre munie d'une norme et si pour tout vecteurs u et v on a $\|uv\| \leq \|u\| \, \|v\|$, alors on dit que E est une *algèbre normée*.

Exemples de normes usuelles

– Dans $\mathbb{K}^n$, on pose, pour tout vecteur $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} \|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|u\|_0 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ \|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{cases}$$

– Ces définitions s'étendent à un espace vectoriel E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
– Un espace préhilbertien E, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, est un espace vectoriel normé avec la norme déduite de son produit scalaire : $\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{< u, u >}$.

Remarque

Dans un espace vectoriel normé E, et pour tout vecteurs u et v : $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\|$.

Ce résultat complète l'inégalité triangulaire.

I.2 Distance associée à une norme

Définition *(Distance associée à une norme)*

Soit E un espace vectoriel normé. Pour tous vecteur u, v de E on pose $d(u, v) = \|v - u\|$.
Cette application est une *distance* sur E car elle vérifie les propriétés suivantes :
– $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0 \quad$ et $\quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
– $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) = d(v, u)$.
– $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.
On l'appelle distance *induite* par la norme $u \mapsto \|u\|$ sur E.

Propriétés

- Pour tous vecteurs u, v, w de E, $|d(u,v) - d(v,w)| \leq d(u,w)$.
- La distance d est *invariante par translation* : $\forall (u,v,w) \in E^3, d(u,v) = d(u+w, v+w)$.

Définition *(Distance d'un point à une partie de E)*

Soit a un élément de l'espace vectoriel normé E, et X une partie non vide de E.
On appelle distance de a à X la quantité $d(a,X) = \inf\{d(a,u), u \in X\}$.

Définition *(Boules et sphères)*

Soit a un vecteur de E et r un réel strictement positif.
- $B(a,r) = \{u \in E, d(a,u) < r\}$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r.
- $\bar{B}(a,r) = \{u \in E, d(a,u) \leq r\}$ est la *boule fermée* de centre a et de rayon r.
- $S(a,r) = \{u \in E, d(a,u) = r\}$ est la *sphère* de centre a et de rayon r.

Cas particulier : si $a = 0$ et $r = 1$, on parle de *boule unité* ou de *sphère unité*.

Définition *(Parties bornées)*

Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(0,r)$.

Remarques

- Soit X une partie bornée et non vide de E.

  La quantité $\Delta(X) = \sup\{d(u,v), u \in X, v \in X\}$ est finie. On l'appelle le *diamètre* de X.
- Toute boule de rayon r est une partie bornée de diamètre $2r$.

I.3 Equivalence des normes

Définition *(Normes équivalentes)*

Deux normes N et N' sur l'espace vectoriel normé E sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall u \in E, \alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u)$.

Remarques

- La définition précédente est symétrique par rapport à N et à N'. En effet :

  $\alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u) \Leftrightarrow \beta' N'(u) \leq N(u) \leq \alpha' N'(u)$ avec $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\beta' = \dfrac{1}{\beta}$.

  De même, si N et N' sont équivalentes, ainsi que N' et N'', alors N et N'' sont équivalentes.
- Deux normes N et N' sont équivalentes $\Leftrightarrow$ pour tout a de E, toute boule de centre a pour N (resp. pour N') contient une boule de centre a pour N' (resp. N).

Théorème *(Équivalence des normes en dimension finie)*

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).

I.4 Ouverts et fermés

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Définition *(Point intérieur)*

Soit A une partie de E. Un point a de E est dit *intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A.

Un point intérieur à A est évidemment un point de A.

Définition *(Ensemble ouvert)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est un *ouvert* si tous ses points sont intérieurs à A.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions d'ouvert coïncident.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- Une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Définition *(Point adhérent)*

Soit A une partie de E.

Un point a de E est dit *adhérent* à A si, pour tout $r > 0$ l'intersection de A et de la boule ouverte $B(a, r)$ est non vide.

Tout point de A est évidemment adhérent à A.

Définition *(Ensemble fermé)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est un *fermé* s'il contient tous ses points adhérents.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des fermés de E.
- A est fermé dans $E \Leftrightarrow$ son complémentaire dans E est ouvert.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions de fermé coïncident.
- Les boules fermées sont des fermés.
- Les sphères sont des fermés.
- Les unions *finies* de fermés sont des fermés.
- Les intersections *quelconques* de fermés sont des fermés.
- Les points, et plus généralement les ensembles finis, sont des fermés.

Remarque

Deux normes équivalentes définissent la même *topologie*, c'est-à-dire les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

Définition

On note A° et on appelle *intérieur* de A l'ensemble des points de A qui intérieurs à A.

On note $\bar{A}$ et on appelle *adhérence* de A l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A.

Propriétés. Soit A une partie de E.

- On a $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$
- A est ouvert $\Leftrightarrow A^\circ = A$; A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.
- A° est le plus grand ouvert contenu dans A.
- $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Définition *(Parties denses dans un evn)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est *dense* dans E si $\bar{A} = E$, c'est-à-dire si tout point de E est adhérent à A.

Exemple

$\mathbb{Q}$ et son complémentaire sont denses dans $\mathbb{R}$.