I Espaces vectoriels normés

I.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une *norme* si :
- $\forall u \in E, N(u) \geq 0, \quad \text{et} \quad N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u).$
- $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire)*

On note en général $\|u\|$ plutôt que $N(u)$.

L'espace E, muni de la norme $u \mapsto \|u\|$ est appelé un *espace vectoriel normé*.

Définition

Si E est une algèbre munie d'une norme et si pour tout vecteurs u et v on a $\|uv\| \leq \|u\| \ \|v\|$, alors on dit que E est une *algèbre normée*.

Exemples de normes usuelles

- Dans $\mathbb{K}^n$, on pose, pour tout vecteur $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} \|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|u\|_0 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ \|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{cases}$$

- Ces définitions s'étendent à un espace vectoriel E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
- Un espace préhilbertien E, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, est un espace vectoriel normé avec la norme déduite de son produit scalaire : $\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{< u, u >}$.

Remarque

Dans un espace vectoriel normé E, et pour tout vecteurs u et v : $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\|$.

Ce résultat complète l'inégalité triangulaire.

I.2 Distance associée à une norme

Définition *(Distance associée à une norme)*

Soit E un espace vectoriel normé. Pour tous vecteur u, v de E on pose $d(u, v) = \|v - u\|$.

Cette application est une *distance* sur E car elle vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0 \quad \text{et} \quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v.$
- $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) = d(v, u).$
- $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v).$

On l'appelle distance *induite* par la norme $u \mapsto \|u\|$ sur E.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Propriétés

– Pour tous vecteurs u, v, w de E, $|d(u,v) - d(v,w)| \leq d(u,w)$.
– La distance d est *invariante par translation* : $\forall (u,v,w) \in E^3, d(u,v) = d(u+w, v+w)$.

Définition *(Distance d'un point à une partie de E)*

Soit a un élément de l'espace vectoriel normé E, et X une partie non vide de E.
On appelle distance de a à X la quantité $d(a,X) = \inf\{d(a,u), u \in X\}$.

Définition *(Boules et sphères)*

Soit a un vecteur de E et r un réel strictement positif.
– $B(a,r) = \{u \in E, d(a,u) < r\}$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r.
– $\bar{B}(a,r) = \{u \in E, d(a,u) \leq r\}$ est la *boule fermée* de centre a et de rayon r.
– $S(a,r) = \{u \in E, d(a,u) = r\}$ est la *sphère* de centre a et de rayon r.
Cas particulier : si $a = 0$ et $r = 1$, on parle de *boule unité* ou de *sphère unité*.

Définition *(Parties bornées)*

Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(0,r)$.

Remarques

– Soit X une partie bornée et non vide de E.
La quantité $\Delta(X) = \sup\{d(u,v), u \in X, v \in X\}$ est finie. On l'appelle le *diamètre* de X.
– Toute boule de rayon r est une partie bornée de diamètre $2r$.

I.3 Equivalence des normes

Définition *(Normes équivalentes)*

Deux normes N et N' sur l'espace vectoriel normé E sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall u \in E, \alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u)$.

Remarques

– La définition précédente est symétrique par rapport à N et à N'. En effet :
$\alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u) \Leftrightarrow \beta' N'(u) \leq N(u) \leq \alpha' N'(u)$ avec $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\beta' = \dfrac{1}{\beta}$.
De même, si N et N' sont équivalentes, ainsi que N' et N'', alors N et N'' sont équivalentes.
– Deux normes N et N' sont équivalentes $\Leftrightarrow$ pour tout a de E, toute boule de centre a pour N (resp. pour N') contient une boule de centre a pour N' (resp. N).

Théorème *(Équivalence des normes en dimension finie)*

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.4 Ouverts et fermés

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Définition *(Point intérieur)*

Soit A une partie de E. Un point a de E est dit *intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A.

Un point intérieur à A est évidemment un point de A.

Définition *(Ensemble ouvert)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est un *ouvert* si tous ses points sont intérieurs à A.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions d'ouvert coïncident.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- Une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Définition *(Point adhérent)*

Soit A une partie de E.

Un point a de E est dit *adhérent* à A si, pour tout $r > 0$ l'intersection de A et de la boule ouverte $B(a, r)$ est non vide.

Tout point de A est évidemment adhérent à A.

Définition *(Ensemble fermé)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est un *fermé* s'il contient tous ses points adhérents.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des fermés de E.
- A est fermé dans $E \Leftrightarrow$ son complémentaire dans E est ouvert.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions de fermé coïncident.
- Les boules fermées sont des fermés.
- Les sphères sont des fermés.
- Les unions *finies* de fermés sont des fermés.
- Les intersections *quelconques* de fermés sont des fermés.
- Les points, et plus généralement les ensembles finis, sont des fermés.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarque

Deux normes équivalentes définissent la même *topologie*, c'est-à-dire les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

Définition

On note A° et on appelle *intérieur* de A l'ensemble des points de A qui intérieurs à A.
On note $\bar{A}$ et on appelle *adhérence* de A l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A.

Propriétés. Soit A une partie de E.

- On a $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$
- A est ouvert $\Leftrightarrow A^\circ = A$; A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.
- A° est le plus grand ouvert contenu dans A.
- $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Définition *(Parties denses dans un evn)*

Soit A une partie de E.
On dit que A est *dense* dans E si $\bar{A} = E$, c'est-à-dire si tout point de E est adhérent à A.

Exemple

$\mathbb{Q}$ et son complémentaire sont denses dans $\mathbb{R}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021