II Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

II.1 Généralités

Définition

Une *suite* de E est une application $u: \mathbb{N} \to E$.
L'image $u(n)$ d'un entier n est appelée le *terme d'indice* n de la suite u et est noté u_n.
La suite u elle-même est alors notée $(u_n)_{n\geq 0}$.
Si $E = \mathbb{K}$, on dit que u est une suite *numérique* (une suite *réelle* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et une suite *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

Définition *(Suite stationnaire)*

Une suite u de E est dite *stationnaire* si : $\exists a \in E, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.
Si $n_0 = 0$, c'est-à-dire si pour tout n, $u_n = u_0$, alors on dit que la suite u est *constante*.

Définition *(Suite bornée)*

La suite u est dite *bornée* si l'ensemble image $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, c'est-à-dire s'il existe un réel positif M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

Définition *(Suites extraites)*

On dit que la suite v est une *suite extraite* ou une *sous-suite* de la suite u s'il existe une application $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarques

– Avec les notations ci-dessus, on vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
– Comme cas particulier de suite extraite, on peut définir la suite des termes d'indices pairs ($\varphi(n) = 2n$) ou la suite des termes d'indices impairs ($\varphi(n) = 2n + 1$.)
– On peut également considérer $\varphi: n \mapsto n + k$, où k est fixé.
  La suite extraite v, définie par $v_0 = u_k, v_1 = u_{k+1}, v_2 = u_{k+2}, \ldots$ est alors notée $(u_n)_{n\geq k}$.

Définition *(Opérations sur les suites)*

L'ensemble de suites d'éléments de E est noté $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$, ou $E^{\mathbb{N}}$.
Cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on le munit des opérations suivantes :
– Addition : $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$.
  Le neutre est la *suite nulle*, définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.
– Produit par un scalaire : $\lambda(u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$.

Si E est une algèbre de neutre 1, $E^{\mathbb{N}}$ est une algèbre avec : $(u_n)_{n\geq 0}(v_n)_{n\geq 0} = (u_n v_n)_{n\geq 0}$.
Le neutre pour ce produit est la suite constante définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

II.2 Suites convergentes

Définition

La suite u de E est dite *convergente* (CV) s'il existe un élément ℓ de E tel que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Remarques

- Dans la définition précédente, on peut remplacer $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ par $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.
  De même, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ s'écrit aussi $u_n \in \bar{B}(\ell, \varepsilon)$ ou $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$.
- Une suite non convergente est dite *divergente* (DV).

Propriétés immédiates

- Si la suite u est convergente, l'élément ℓ de la définition est unique.
  On l'appelle *limite* de la suite u et on note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
- Toute suite stationnaire est convergente vers la valeur où elle stationne.
- Si la suite u est convergente, ses suites extraites sont convergentes, avec la même limite.
  Conséquence : Si une suite extraite de u est divergente, la suite u est divergente.
  Même conclusion si deux suites extraites de u ont des limites différentes.
- Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.
- Si la suite u converge vers ℓ, la suite $n \mapsto \|u_n\|$ converge vers $\|l\|$.
- La suite u converge vers $\ell \Leftrightarrow$ la suite $n \mapsto \|u_n - \ell\|$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition (*Opérations sur les suites convergentes*)

Soient u et v deux suites convergentes de E. Soient α et β deux scalaires.
La suite de terme général $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ est convergente.
De plus on a : $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.
Si E est une algèbre normée : $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Proposition (*Indépendance par rapport à la norme utilisée*)

Soit E un espace vectoriel et N et N' deux normes *équivalentes* sur E (ce qui est automatiquement le cas si on est en dimension finie).
Une suite u de E est convergente au sens de la norme $N \Leftrightarrow$ elle l'est au sens de la norme N', et dans ce cas les deux limites sont égales.

Proposition (*Utilisation des composantes en dimension finie*)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_p$.
Soit u une suite de E, de terme général $u^{(n)}$.

Pour tout entier n, posons $u^{(n)} = u_1^{(n)} e_1 + u_2^{(n)} e_2 + \cdots + u_p^{(n)} e_p = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k^{(n)} e_k$. Soit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k\, e_k$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)} = \ell \iff \forall k \in \{1, \ldots, p\},\ \lim\limits_{n\to\infty} u_k^{(n)} = \ell_k$.

Exemples

- Soit z une suite à valeurs complexes. Pour tout n, soit $u_n = \mathrm{Re}\,(\mathrm{z_n})$ et $v_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$.

  La suite z converge vers le nombre complexe $\ell \Leftrightarrow$ les suites réeles u et v convergent respectivement vers $\mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\mathrm{Im}\,(\ell)$.
- Soit $n \mapsto A_n$ une suite de matrices, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

  Pour tout entier n, soit $a_{i,j}^{(n)}$ le terme d'indice (i,j) de A_n.

  La suite $n \mapsto A_n$ converge vers M (de terme général $m_{i,j}$) $\Leftrightarrow$, pour tous indices i et j, la suite numérique $n \mapsto a_{i,j}^{(n)}$ converge vers $m_{i,j}$.

II.3 Suites convergentes et adhérence

Proposition

Si la suite u converge vers ℓ, alors ℓ est adhérent à $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition *(Caractérisation de l'adhérence par les suites)*

Le point a de E est adhérent à la partie A de E $\Leftrightarrow$ il existe une suite de A qui converge vers a. Par conséquent A est fermé $\Leftrightarrow$ la limite de toute suite convergente de A est dans A.

II.4 Suites de Cauchy

Définition *(Suites de Cauchy)*

Une suite u de E est dite *de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$.

Remarques et propiétés

- Cette définition peut s'écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon$.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème

Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente.

Plus généralement, toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé *de dimension finie* est convergente.

II.5 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition *(Parties compactes)*

Une partie non vide A de E est dite *compacte* si de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème *(Caractérisation des compacts en dimension finie)*

> Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
> Les parties compactes de E sont les fermés bornés de E.

Conséquence

> De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.