II Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

II.1 Généralités

Définition

Une *suite* de E est une application $u : \mathbb{N} \to E$.

L'image $u(n)$ d'un entier n est appelée le *terme d'indice* n de la suite u et est noté u_n.

La suite u elle-même est alors notée $(u_n)_{n\geq 0}$.

Si $E = \mathbb{K}$, on dit que u est une suite *numérique* (une suite *réelle* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et une suite *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

Définition *(Suite stationnaire)*

Une suite u de E est dite *stationnaire* si : $\exists a \in E, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Si $n_0 = 0$, c'est-à-dire si pour tout n, $u_n = u_0$, alors on dit que la suite u est *constante*.

Définition *(Suite bornée)*

La suite u est dite *bornée* si l'ensemble image $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, c'est-à-dire s'il existe un réel positif M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

Définition *(Suites extraites)*

On dit que la suite v est une *suite extraite* ou une *sous-suite* de la suite u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarques

- Avec les notations ci-dessus, on vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
- Comme cas particulier de suite extraite, on peut définir la suite des termes d'indices pairs $(\varphi(n) = 2n)$ ou la suite des termes d'indices impairs $(\varphi(n) = 2n + 1.)$
- On peut également considérer $\varphi : n \mapsto n + k$, où k est fixé.

  La suite extraite v, définie par $v_0 = u_k, v_1 = u_{k+1}, v_2 = u_{k+2}, \ldots$ est alors notée $(u_n)_{n\geq k}$.

Définition *(Opérations sur les suites)*

L'ensemble de suites d'éléments de E est noté $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$, ou $E^{\mathbb{N}}$.

Cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on le munit des opérations suivantes :
- Addition : $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$.

  Le neutre est la *suite nulle*, définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.
- Produit par un scalaire : $\lambda(u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$.

Si E est une algèbre de neutre 1, $E^{\mathbb{N}}$ est une algèbre avec : $(u_n)_{n\geq 0}(v_n)_{n\geq 0} = (u_n v_n)_{n\geq 0}$.

Le neutre pour ce produit est la suite constante définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.2 Suites convergentes

Définition

La suite u de E est dite *convergente* (CV) s'il existe un élément ℓ de E tel que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Remarques

- Dans la définition précédente, on peut remplacer $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ par $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.
  De même, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ s'écrit aussi $u_n \in \bar{B}(\ell, \varepsilon)$ ou $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$.
- Une suite non convergente est dite *divergente* (DV).

Propriétés immédiates

- Si la suite u est convergente, l'élément ℓ de la définition est unique.
  On l'appelle *limite* de la suite u et on note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
- Toute suite stationnaire est convergente vers la valeur où elle stationne.
- Si la suite u est convergente, ses suites extraites sont convergentes, avec la même limite.
  Conséquence : Si une suite extraite de u est divergente, la suite u est divergente.
  Même conclusion si deux suites extraites de u ont des limites différentes.
- Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.
- Si la suite u converge vers ℓ, la suite $n \mapsto \|u_n\|$ converge vers $\|l\|$.
- La suite u converge vers $\ell \Leftrightarrow$ la suite $n \mapsto \|u_n - \ell\|$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition *(Opérations sur les suites convergentes)*

Soient u et v deux suites convergentes de E. Soient α et β deux scalaires.
La suite de terme général $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ est convergente.
De plus on a : $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.
Si E est une algèbre normée : $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Proposition *(Indépendance par rapport à la norme utilisée)*

Soit E un espace vectoriel et N et N' deux normes *équivalentes* sur E (ce qui est automatiquement le cas si on est en dimension finie).
Une suite u de E est convergente au sens de la norme $N \Leftrightarrow$ elle l'est au sens de la norme N', et dans ce cas les deux limites sont égales.

Proposition *(Utilisation des composantes en dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_p$.
Soit u une suite de E, de terme général $u^{(n)}$.
Pour tout entier n, posons $u^{(n)} = u_1^{(n)} e_1 + u_2^{(n)} e_2 + \cdots + u_p^{(n)} e_p = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k^{(n)} e_k$. Soit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k \, e_k$.
Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)} = \ell \iff \forall k \in \{1, \ldots, p\}, \lim\limits_{n\to\infty} u_k^{(n)} = \ell_k$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Exemples

– Soit z une suite à valeurs complexes. Pour tout n, soit $u_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $v_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$.

La suite z converge vers le nombre complexe $\ell \Leftrightarrow$ les suites réeles u et v convergent respectivement vers $\mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\mathrm{Im}\,(\ell)$.

– Soit $n \mapsto A_n$ une suite de matrices, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Pour tout entier n, soit $a_{i,j}^{(n)}$ le terme d'indice (i,j) de A_n.

La suite $n \mapsto A_n$ converge vers M (de terme général $m_{i,j}$) $\Leftrightarrow$, pour tous indices i et j, la suite numérique $n \mapsto a_{i,j}^{(n)}$ converge vers $m_{i,j}$.

II.3 Suites convergentes et adhérence

Proposition

Si la suite u converge vers ℓ, alors ℓ est adhérent à $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition *(Caractérisation de l'adhérence par les suites)*

Le point a de E est adhérent à la partie A de $E \Leftrightarrow$ il existe une suite de A qui converge vers a. Par conséquent A est fermé $\Leftrightarrow$ la limite de toute suite convergente de A est dans A.

II.4 Suites de Cauchy

Définition *(Suites de Cauchy)*

Une suite u de E est dite *de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$.

Remarques et propiétés

– Cette définition peut s'écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon$.

– Toute suite de Cauchy est bornée.

– Toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème

Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente.

Plus généralement, toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé *de dimension finie* est convergente.

II.5 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition *(Parties compactes)*

Une partie non vide A de E est dite *compacte* si de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergente.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Théorème *(Caractérisation des compacts en dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Les parties compactes de E sont les fermés bornés de E.

Conséquence

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021