IV Applications continues particulières

E, F, G sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

IV.1 Applications lipschitziennes

Définition

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit $\lambda > 0$. L'application f est dite λ-*lipschitzienne* ou encore lipschitzienne de rapport λ si : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$. Si $k < 1$, on dit que f est *contractante*.

Propriétés et exemples

- Si on remplace une norme par une norme équivalente, f reste lipschitzienne (mais pas avec le même λ.)
- Si f est λ-lipschitzienne, et si $\lambda < \mu$, f est encore μ-lipschitzienne.
- Toute application lipschitzienne est continue.
- Les *isométries* de E dans F ($\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$) sont 1-lipschitziennes donc continues.
- L'application *norme* de E dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne donc continue.

  En effet : $\forall (x,y) \in E^2, \ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
- On suppose que E est de dimension $n \geq 1$ et est rapporté à une base (e).

  On munit par exemple E de la norme définie par $\|x\| = \max\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$.

  Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, soit π_k l'application qui à x associe sa composante x_k sur e_k.

  L'application π_k (dite k-ième application coordonnée) est lipschitzienne donc continue.

  En effet, pour tous vecteurs x et y de E : $|\pi_k(y) - \pi_k(x)| = |y_k - x_k| \leq \|y - x\|$
- Toute application polynômiale $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme : $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto P(u) = \sum \alpha_m \, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ est continue (mais en général non lipschitzienne).

  En effet cette application est obtenue à partir des applications coordonnées $x \mapsto x_k$ par des opérations (sommes, produits) qui préservent la continuité.

IV.2 Applications linéaires continues

Important : dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie.

Proposition et définition

Soit f une application linéaire de E dans F. Les quantités suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \qquad \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\| \qquad \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Leur valeur commune est appelée norme de f et est notée $\|f\|$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition équivalente

Avec ces notations $\|f\|$ est le réel k minimum tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \ \|x\|$.

Conséquence

Toute application linéaire de E (avec $\dim E < +\infty$) dans F est continue, et elle est même lipschitzienne.

Remarques et propriétés

- La valeur de $\|f\|$ dépend des normes qui ont été choisies sur E et F.
- Muni de l'application $f \mapsto \|f\|$, l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E,F)$ de toutes les applications linéaires de E dans F est lui-même un espace vectoriel normé.
- On suppose que E et F sont tous deux de dimension finie.

  Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.

  Alors $\|g \circ f\| \leq \|g\| \, \|f\|$.

  En particulier l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ de tous les endomorphismes de E est une *algèbre normée*.

IV.3 Applications bilinéaires continues

Important : dans les deux énoncés suivants, on suppose que E et F sont de dimension finie.

Définition

Soit f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Alors il existe un réel positif k tel que : $\forall (x,y) \in E \times F, \|f(x,y)\| \leq k \ \|x\| \, \|y\|$

Conséquence

Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Exemples d'applications bilinéaires continues

Dans ces exemples, il n'est pas nécessaire que E soit de dimension finie.

- L'application de $E \times E$ dans E, qui à (u,v) associe $u+v$, est continue.
- Si E est un espace préhilbertien, l'application $(u,v) \mapsto < u,v >$ est continue.

  C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|< u,v >| \leq \|u\| \, \|v\|$
- L'application de $\mathbb{K} \times E$ vers E définie par $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ est continue.
- Si E est une algèbre normée, l'application $(u,v) \mapsto uv$ est continue.

  En particulier, l'application $(f,g) \mapsto f \circ g$ est continue sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021