Compléments de calcul intégral

Sommaire

I Intégrales doubles ou triples

I.1 Intégrales doubles : théorèmes de Fubini

Théorème

Soient u, v deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $u \leq v$.
Soit Δ le compact du plan défini par : $a \leq x \leq b$ et $u(x) \leq y \leq v(x)$.
Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_{\Delta} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

Théorème

Soient u, v deux applications continues de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$, avec $u \leq v$.
Soi Δ le compact du plan défini par : $c \leq y \leq d$ et $u(y) \leq x \leq v(y)$.
Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_{\Delta} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

Cas particuliers

– Soit Δ le compact $[a, b] \times [c, d]$. Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
  On a l'égalité : $\displaystyle\iint_{\Delta} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$
– Supposons notamment que $f(x, y) \equiv \varphi(x)\psi(y)$, où φ et ψ sont continues.
  Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iint_{\Delta} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y.$

I.2 Intégrales doubles : Changement de variables

Proposition

Soit f une application continue sur le compact Δ, inclus dans l'ouvert V.
Soient D un compact inclus dans l'ouvert U et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(D) = \Delta$.
On suppose que φ est injective ou sinon que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents a une aire nulle.
On note $(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ce changement de variables.
Soit $J(u, v) = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ le jacobien de φ en un point quelconque de U.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iint_{\Delta} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Passage en coordonnées polaires

La formule s'écrit : $\displaystyle\iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

I.3 Formule de Grien-Riemann et applications

Proposition

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^2$, de frontière δ. On suppose que δ est sans point double, et orientée dans le sens positif : si on suit cette frontière orientée, on laisse Δ sur sa gauche.

Soit $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant Δ.

Alors $\displaystyle\int_{\delta} \omega = \int_{\delta} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Conséquences

– *Aires planes se ramenant à des intégrales curvilignes*

Avec les notations ci-dessus, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de Δ s'obtient par :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{\delta} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\delta} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\delta} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

– *Calcul des aires de domaines définis en coordonnées polaires*

Soit Δ le domaine du plan limité par les demi-droites issues de O d'angles polaires $\theta_1 \le \theta_2$, et par la courbe d'équation $\rho = \rho(\theta) \ge 0$.

Alors l'aire de Δ s'écrit : $\displaystyle\mathcal{A}(\Delta) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$

I.4 Intégrales triples : Théorèmes de Fubini

Théorème

Soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ et u, v deux applications continues de D dans $\mathbb{R}$.

Soit Δ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par : $(x,y) \in D,\ u(x,y) \le z \le v(x,y)$.

Soit f une application continue définie sur Δ, à valeurs réelles.

Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D} \left(\int_{u(x,y)} v(x,y) f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Théorème

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^3$ limité inférieurement par $z = a$ et supérieurement par $z = b$.

Pour tout z de $[a, b]$ soit $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) \in \Delta\}$.

Soit f une application continue définie sur Δ, à valeurs réelles.

Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{a}^{c} \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}z$

Cas particuliers

– Soit Δ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par $\Delta = [p,q] \times [r,s] \times [t,u]$.

Alors, par exemple : $\displaystyle\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_t^u \left(\int_r^s \left(\int_p^q f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z.$

– En particulier, si $f(x,y,z) \equiv \varphi(x)\psi(y)\xi(z)$, où φ, ψ, ξ sont continues :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_p^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_r^s \psi(y)\,\mathrm{d}y \int_t^u \xi(z)\,\mathrm{d}z.$$

I.5 Intégrales triples : Changement de variables

Proposition

Soit f une application continue sur le compact Δ, inclus dans l'ouvert V.

Soient D un compact inclus dans l'ouvert U et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(D) = \Delta$.

On suppose que φ est injective ou sinon que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents a un volume nul.

On note $(u,v,w) \mapsto \varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Soit $J(u,v,w) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ le jacobien de φ en un point quelconque de U.

Alors on a l'égalité :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Exemples

– *Passage en coordonnées cylindriques*

La formule s'écrit : $\displaystyle\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\ d\theta\,\mathrm{d}z.$

– *Passage en coordonnées sphériques*

Avec $x = r\,\cos\theta\,\sin\varphi$, $y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi$, et $z = r\,\cos\varphi$, où θ désigne la longitude et φ la colatitude, et en notant g l'application définie par $g(r,\theta,\varphi) = f(x,y,z)$, la formule devient :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D g(r,\theta,\varphi)\,r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

II Centres et moments d'inertie

II.1 Cas d'une plaque plane

On définit ici les éléments d'inertie d'une plaque du plan Oxy limitée par un compact D, et "recouverte" d'une densité surfacique $\mu(x,y) \geq 0$.

Définition

La masse d'une plaque plane est l'intégrale de sa densité : $m(D) = \iint \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Remarque

On suppose que la plaque est homogène, c'est-à-dire recouverte d'une densité constante μ.
Alors $m(D) = \mu A(D)$, où $A(D) = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est l'aire de D.

Définition

Le centre d'inertie G de la plaque D est défini par $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m(D)} \iint_D \overrightarrow{0M}\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où $M = (x,y)$ est un point parcourant D et où $m(D)$ est la masse de la plaque D.

Remarques

- Si D est homogène alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{A(D)} \iint_D \overrightarrow{0M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $A(D)$ est l'aire de la plaque D.
- Les coordonnées de G s'obtiennent par projection :
  $x_G = \dfrac{1}{m(D)} \iint_D x\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, et $y_G = \dfrac{1}{m(D)} \iint_D y\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
  Et dans le cas d'une plaque homogène :
  $x_G = \dfrac{1}{A(D)} \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, et $y_G = \dfrac{1}{A(D)} \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Des considérations de symétrie peuvent souvent faciliter le calcul des coordonnées de G.

Définition

Soit D un compact du plan. On désigne ici par Γ un point ou une droite du plan.
Le moment d'inertie de D par rapport à Γ est $I_\Gamma = \iint_D d(M,\Gamma)^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où $d(M,\Gamma)$ est la distance du point courant $M(x,y)$ de D à Γ.

Remarques et exemples

- Les moments d'inertie sont homogènes au produit d'une masse par le carré d'une distance.
- Le moment d'inertie de D par rapport à l'axe Ox est $I_{0x} = \iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Le moment d'inertie de D par rapport à l'axe Oy est $I_{Oy} = \iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Le moment d'inertie de D par rapport à O est $I_O = \iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_{0x} + I_{0y}$.

II.2 Cas d'un solide en dimension 3

On définit ici les éléments d'inertie d'un solide de l'espace Oxy limité par un compact D, et muni d'une densité volumique $\mu(x,y,z)\geq 0$.

Définition

La masse du solide D est l'intégrale de sa densité : $m(D)=\iiint_D \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Remarque

Supposons que le solide D soit homogène, c'est-à-dire de densité constante μ.

Alors la masse de D est $m(D)=\mu V(D)$, où $V(D)=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est le volume de D.

Définition

Le centre d'inertie du solide D est le point G défini par :
$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{m(D)}\iiint_D \overrightarrow{0M}\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Remarques

– Si D est homogène alors $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{V(D)}\iiint_D \overrightarrow{0M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $V(D)$ est le volume de D.

– Les coordonnées de G s'obtiennent par projection :
$x_G=\dfrac{1}{m(D)}\iiint_D x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad y_G=\dfrac{1}{m(D)}\iiint_D y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
et $z_G=\dfrac{1}{m(D)}\iiint_D z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

– Dans le cas d'une plaque homogène :

$$x_G=\frac{1}{A(D)}\iiint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad y_G=\frac{1}{A(D)}\iiint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$z_G=\frac{1}{A(D)}\iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

– Des considérations de symétries peuvent souvent faciliter le calcul des coordonnées de G.

Définition

On désigne ici par Γ un point, une droite ou un plan de l'espace.

Le moment d'inertie de D par rapport à Γ est $I_\Gamma=\iiint_D d(M,\Gamma)^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où $d(M,\Gamma)$ est la distance du point courant $M(x,y,z)$ de D à Γ.

Remarques et exemples

- Les moments d'inertie sont homogènes au produit d'une masse par le carré d'une distance.
- Le moment d'inertie de D par rapport au plan Oxy est $I_{0xy} = \iiint_D z^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Le moment d'inertie par rapport au plan Oxz est $I_{0xz} = \iiint_D y^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Le moment d'inertie par rapport au plan Oyz est $I_{0yz} = \iiint_D x^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox est $I_{0x} = \iiint_D (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

  On constate que $I_{Ox} = I_{Oxy} + I_{Oxz}$.
- Le moment d'inertie par rapport à l'origine est $I_0 = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

  On constate que $I_0 = I_{Oxy} + I_{Oxz} + I_{Oyz}$.

III Intégrales curvilignes

III.1 Rappels

- On considère ici l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé. Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.
- Un arc paramétré (I, φ) est la donnée d'un intervalle I et d'une application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$.
- L'image de t est notée $M(t)$. C'est le "point de paramètre t".
  On notera $x(t), y(t), z(t)$ les coordonnées de $M(t)$.
- L'ensemble des points $M(t)$, quand t parcourt l'intervalle I, est appelé le support de l'arc.
- L'arc (I, φ) est dit continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si φ est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

III.2 Définition

Définition

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans l'ouvert Ω.
Soit $\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ une forme différentielle continue sur Ω.
Pour tout M de Ω la quantité $\omega(M)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall h = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \omega(M)(h) = \alpha P(M) + \beta Q(M) + \gamma R(M)$.
On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc γ le réel noté $\displaystyle\int_\gamma \omega$ égal à :

$$\int_a^b \omega(M(t))M'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(P(M(t))\,x'(t) + Q(M(t))\,y'(t) + R(M(t))\,z'(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Propriétés

- La quantité $\displaystyle\int_\gamma \omega$ est linéaire par rapport à ω.
- L'intégrale curviligne de ω sur un arc fermé ne dépend pas de l'origine choisie sur cet arc.
- On généralise facilement, par la relation de "Chasles", la définition de $\displaystyle\int_\gamma \omega$ au cas d'un arc $\gamma = (I, \varphi)$ où φ est continue sur I et seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

III.3 Cas des formes exactes

Proposition

Soit $([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux de support contenu dans Ω ouvert.
Soient $A = M(a)$ et $B = M(b)$ l'origine et l'extrémité de l'arc γ.
Soit $\omega = \mathrm{d}f$ une forme différentielle exacte sur Ω, où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$.

Remarques

- L'intégrale curviligne d'une forme différentielle ω exacte sur un arc paramétré ne dépend que des extrémités de l'arc et est égale à l'accroissement d'une primitive quelconque de ω.
- En particulier, si γ est un arc fermé alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

IV Notions d'analyse vectorielle

Soit $\mathcal{E}_3$ l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct.

Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.

On désigne par Ω un ouvert de $\mathcal{E}_3$.

IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

Définition

Un *champ de scalaires* sur l'ouvert Ω est une application f de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- On dit que ce champ est continu (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe $f(M) = f(x, y, z)$ est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$).
- Les surfaces d'équations $f(M) = \lambda$ sont appelées *surfaces de niveau* de f.

Définition

Un *champ de vecteurs* sur l'ouvert Ω est une application E de Ω dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques

- Un champ de vecteurs E est déterminé par trois champs de scalaires P, Q, R :
  $\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3, E(M) = (P(M), Q(M), R(M))$.
- Le champ E est continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $\Leftrightarrow$ P, Q, R sont continus (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).
- Les *lignes de champ* de E sont les arcs Γ tels qu'en tout point M de Γ, le vecteur $E(M)$ soit porté par la tangente en M à l'arc Γ.

IV.2 Circulation et gradient

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs)

Au champ $E = (P, Q, R)$ correspond la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc paramétré de support inclus dans Ω.

L'intégrale curviligne de ω sur l'arc γ est appelée *circulation* du champ E le long de cet arc.

Elle se note $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\gamma \omega = \int_a^b (P(M)\,x'(t) + Q(M)\,y'(t) + R(M)\,z'(t))\,\mathrm{d}t$.

Définition (Gradient d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$, de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle *gradient* de f le champ de vecteurs, noté $\text{grad}(f)$, défini par :
$\forall M(x,y,z) \in \Omega, \text{grad}(f)(M) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M), \dfrac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$

Définition (Champs de gradients)

On dit qu'un champ de vecteurs $E = (P, Q, R)$ est un *champ de gradients* sur Ω s'il existe un champ f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω tel que $E = \text{grad}(f)$.

Remarques

- Le champ de vecteurs $E = (P, Q, R)$ est un champ de gradients $\Leftrightarrow$ la forme différentielle $w = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte.
  Plus précisément : $E = \text{grad}(f) \Leftrightarrow \omega = \text{d}f$.
- Si $E = \text{grad}(f)$, on dit que f est un *potentiel scalaire* du champ E. Les lignes de champs de E sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de f, appelées ici *équipotentielles*.
- Soit $E = \text{grad}(f)$ un champ de gradients. La circulation de E le long de l'arc paramétré $\gamma = ([a, b], \varphi)$ est égale à $f(B) - f(A)$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel scalaire f.

IV.3 Divergence et rotationnel

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *divergence* de E, et on note $\text{div}(E)$, le champ de scalaires défini sur Ω par :
$\forall M \in \Omega, \text{div}(E)(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(M) + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(M) + \dfrac{\partial R}{\partial z}(M)$.

Interprétation

$\text{div}(E)$ est le produit scalaire $\overrightarrow{i} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial x} + \overrightarrow{j} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial y} + \overrightarrow{k} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}$.

Définition (Rotationnel d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *rotationnel* de E, le champ de vecteurs défini sur Ω par :
$\forall M \in \Omega, \text{rot}(E)(M) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y}(M) - \dfrac{\partial Q}{\partial z}(M), \dfrac{\partial P}{\partial z}(M) - \dfrac{\partial R}{\partial x}(M), \dfrac{\partial Q}{\partial x}(M) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(M)\right)$

Interprétation et notation

– $\mathrm{rot}(E)$ est le champ de vecteurs $\vec{i} \wedge \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z}$.

– Avec l'opérateur "Nabla" :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \mathrm{rot}(E) = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Définition (Champs de rotationnels)

On dit qu'un champ de vecteurs E de classe $\mathcal{C}^1$ est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs continu F tel que, sur l'ouvert Ω, on ait $E = \mathrm{rot}(F)$.

On dit alors que E dérive du *potentiel vecteur* F.

Définition (Laplacien d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *laplacien* de f le champ de scalaires, noté Δf défini par :

$\forall M \in \Omega, \Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$.

Remarques

– On remarque que le champ Δf s'écrit $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$.

– On dit que f est *harmonique* sur Ω si son laplacien Δf est nul sur Ω.

IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
  On a les égalités suivantes :
  - ⋄ $\mathrm{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{grad}(f) + \mu \mathrm{grad}(g)$
  - ⋄ $\mathrm{grad}(fg) = f\mathrm{grad}(g) + g\mathrm{grad}(f)$
  - ⋄ $\mathrm{div}(\lambda E + \lambda F) = \lambda \mathrm{div}(E) + \mu \mathrm{div}(F)$
  - ⋄ $\mathrm{rot}(\lambda E + \mu F) = \lambda \mathrm{rot}(E) + \mu \mathrm{rot}(F)$
  - ⋄ $\mathrm{div}(fE) = f\mathrm{div}(E) + < \mathrm{grad}(f), E >$
  - ⋄ $\mathrm{rot}(fE) = f\mathrm{rot}(E) + \mathrm{grad}(f) \wedge E$
  - ⋄ $\mathrm{div}(E \wedge F) = < F, \mathrm{rot}(E) > - < E, \mathrm{rot}(F) >$

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
  On a les égalités suivantes :

- $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$
- $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2 < \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) >$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(E)) = 0$
- $\mathrm{rot}(f\mathrm{grad}(g)) = \mathrm{grad}(f) \wedge \mathrm{grad}(g)$

IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Les champs sont supposés définis sur un ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de rotationnels alors $\mathrm{div}(E) \equiv 0$.
La réciproque est vraie si l'ouvert Ω est étoilé. Les potentiels vecteurs de E sont alors les champs $F = F_0 + \mathrm{grad}(f)$, où F_0 est un potentiel vecteur particulier et où f est un champ scalaire quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de gradients alors $\mathrm{rot}(E) \equiv 0$.
Si Ω est étoilé, la réciproque est vraie : les potentiels scalaires de E sont alors les champs $f = f_0 + \lambda$, où f_0 est un potentiel scalaire particulier et où λ est un champ scalaire constant quelconque.