# Compléments de calcul intégral

## Sommaire

# I Intégrales doubles ou triples

## I.1 Intégrales doubles : théorèmes de Fubini

**Théorème**

Soient $u, v$ deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $u \leq v$.
Soit $\Delta$ le compact du plan défini par : $a \leq x \leq b$ et $u(x) \leq y \leq v(x)$.
Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

**Théorème**

Soient $u, v$ deux applications continues de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$, avec $u \leq v$.
Soi $\Delta$ le compact du plan défini par : $c \leq y \leq d$ et $u(y) \leq x \leq v(y)$.
Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

**Cas particuliers**

– Soit $\Delta$ le compact $[a, b] \times [c, d]$. Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
  On a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$
– Supposons notamment que $f(x, y) \equiv \varphi(x)\psi(y)$, où $\varphi$ et $\psi$ sont continues.
  Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y.$

## I.2 Intégrales doubles : Changement de variables

**Proposition**

Soit $f$ une application continue sur le compact $\Delta$, inclus dans l'ouvert $V$.
Soient $D$ un compact inclus dans l'ouvert $U$ et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(D) = \Delta$.
On suppose que $\varphi$ est injective ou sinon que l'ensemble des points de $\Delta$ qui ont plusieurs antécédents a une aire nulle.
On note $(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ce changement de variables.
Soit $J(u, v) = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ le jacobien de $\varphi$ en un point quelconque de $U$.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

**Passage en coordonnées polaires**

La formule s'écrit : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

## I.3 Formule de Grien-Riemann et applications

**Proposition**

Soit $\Delta$ un compact de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\delta$. On suppose que $\delta$ est sans point double, et orientée dans le sens positif : si on suit cette frontière orientée, on laisse $\Delta$ sur sa gauche.

Soit $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ contenant $\Delta$.

Alors $\displaystyle\int_\delta \omega = \int_\delta P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

**Conséquences**

– *Aires planes se ramenant à des intégrales curvilignes*

Avec les notations ci-dessus, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de $\Delta$ s'obtient par :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_\delta x\,\mathrm{d}y = -\int_\delta y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\delta (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

– *Calcul des aires de domaines définis en coordonnées polaires*

Soit $\Delta$ le domaine du plan limité par les demi-droites issues de $O$ d'angles polaires $\theta_1 \le \theta_2$, et par la courbe d'équation $\rho = \rho(\theta) \ge 0$.

Alors l'aire de $\Delta$ s'écrit : $\displaystyle\mathcal{A}(\Delta) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

## I.4 Intégrales triples : Théorèmes de Fubini

**Théorème**

Soit $D$ un compact de $\mathbb{R}^2$ et $u, v$ deux applications continues de $D$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\Delta$ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par : $(x,y)\in D,\ u(x,y)\le z\le v(x,y)$.

Soit $f$ une application continue définie sur $\Delta$, à valeurs réelles.

Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{u(x,y)} v(x,y) f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

**Théorème**

Soit $\Delta$ un compact de $\mathbb{R}^3$ limité inférieurement par $z = a$ et supérieurement par $z = b$.

Pour tout $z$ de $[a,b]$ soit $D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y,z)\in\Delta\}$.

Soit $f$ une application continue définie sur $\Delta$, à valeurs réelles.

Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^c \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$

### Cas particuliers

- Soit $\Delta$ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par $\Delta = [p, q] \times [r, s] \times [t, u]$.

  Alors, par exemple : $\displaystyle\iiint_\Delta f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_t^u \left(\int_r^s \left(\int_p^q f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}z.$
- En particulier, si $f(x, y, z) \equiv \varphi(x)\psi(y)\xi(z)$, où $\varphi, \psi, \xi$ sont continues :

  $$\iiint_\Delta f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_p^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_r^s \psi(y)\,\mathrm{d}y \int_t^u \xi(z)\,\mathrm{d}z.$$

## I.5 Intégrales triples : Changement de variables

### Proposition

Soit $f$ une application continue sur le compact $\Delta$, inclus dans l'ouvert $V$.

Soient $D$ un compact inclus dans l'ouvert $U$ et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(D) = \Delta$.

On suppose que $\varphi$ est injective ou sinon que l'ensemble des points de $\Delta$ qui ont plusieurs antécédents a un volume nul.

On note $(u, v, w) \mapsto \varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

Soit $J(u, v, w) = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ le jacobien de $\varphi$ en un point quelconque de $U$.

Alors on a l'égalité :

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

### Exemples

- *Passage en coordonnées cylindriques*

  La formule s'écrit : $\displaystyle\iiint_\Delta f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\; d\theta\,\mathrm{d}z.$
- *Passage en coordonnées sphériques*

  Avec $x = r\,\cos\theta\,\sin\varphi$, $y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi$, et $z = r\,\cos\varphi$, où $\theta$ désigne la longitude et $\varphi$ la colatitude, et en notant $g$ l'application définie par $g(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$, la formule devient :

  $$\iiint_\Delta f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D g(r, \theta, \varphi)\,r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

# II Centres et moments d'inertie

## II.1 Cas d'une plaque plane

On définit ici les éléments d'inertie d'une plaque du plan $Oxy$ limitée par un compact $D$, et “recouverte” d'une densité surfacique $\mu(x, y) \geq 0$.

**Définition**

La masse d'une plaque plane est l'intégrale de sa densité : $m(D) = \displaystyle\iint \mu(x, y)\, dx\, dy$.

**Remarque**

On suppose que la plaque est homogène, c'est-à-dire recouverte d'une densité constante $\mu$.
Alors $m(D) = \mu A(D)$, où $A(D) = \displaystyle\iint dx\, dy$ est l'aire de $D$.

**Définition**

Le centre d'inertie $G$ de la plaque $D$ est défini par $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m(D)} \displaystyle\iint_D \overrightarrow{0M} \mu(x, y)\, dx\, dy$, où $M = (x, y)$ est un point parcourant $D$ et où $m(D)$ est la masse de la plaque $D$.

**Remarques**

- Si $D$ est homogène alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{A(D)} \displaystyle\iint_D \overrightarrow{0M}\, dx\, dy$ où $A(D)$ est l'aire de la plaque $D$.
- Les coordonnées de $G$ s'obtiennent par projection :
  $x_G = \dfrac{1}{m(D)} \displaystyle\iint_D x\mu(x, y)\, dx\, dy$, et $y_G = \dfrac{1}{m(D)} \displaystyle\iint_D y\mu(x, y)\, dx\, dy$.
  Et dans le cas d'une plaque homogène :
  $x_G = \dfrac{1}{A(D)} \displaystyle\iint_D x\, dx\, dy$, et $y_G = \dfrac{1}{A(D)} \displaystyle\iint_D y\, dx\, dy$.
- Des considérations de symétrie peuvent souvent faciliter le calcul des coordonnées de $G$.

**Définition**

Soit $D$ un compact du plan. On désigne ici par $\Gamma$ un point ou une droite du plan.
Le moment d'inertie de $D$ par rapport à $\Gamma$ est $I_\Gamma = \displaystyle\iint_D d(M, \Gamma)^2 \mu(x, y)\, dx\, dy$, où $d(M, \Gamma)$ est la distance du point courant $M(x, y)$ de $D$ à $\Gamma$.

**Remarques et exemples**

- Les moments d'inertie sont homogènes au produit d'une masse par le carré d'une distance.
- Le moment d'inertie de $D$ par rapport à l'axe $Ox$ est $I_{0x} = \displaystyle\iint_D y^2 \mu(x, y)\, dx\, dy$.
- Le moment d'inertie de $D$ par rapport à l'axe $Oy$ est $I_{Oy} = \displaystyle\iint_D x^2 \mu(x, y)\, dx\, dy$.
- Le moment d'inertie de $D$ par rapport à $O$ est $I_O = \displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y)\, dx\, dy = I_{0x} + I_{0y}$.

## II.2 Cas d'un solide en dimension 3

On définit ici les éléments d'inertie d'un solide de l'espace $Oxy$ limité par un compact $D$, et muni d'une densité volumique $\mu(x,y,z) \geq 0$.

**Définition**

La masse du solide $D$ est l'intégrale de sa densité : $m(D) = \iiint_D \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

**Remarque**

Supposons que le solide $D$ soit homogène, c'est-à-dire de densité constante $\mu$.

Alors la masse de $D$ est $m(D) = \mu V(D)$, où $V(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est le volume de $D$.

**Définition**

Le centre d'inertie du solide $D$ est le point $G$ défini par :
$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D \overrightarrow{0M}\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

**Remarques**

– Si $D$ est homogène alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{V(D)} \iiint_D \overrightarrow{0M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $V(D)$ est le volume de $D$.

– Les coordonnées de $G$ s'obtiennent par projection :
$x_G = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\quad y_G = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
et $z_G = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

– Dans le cas d'une plaque homogène :
$x_G = \dfrac{1}{A(D)} \iiint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad y_G = \dfrac{1}{A(D)} \iiint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
$z_G = \dfrac{1}{A(D)} \iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

– Des considérations de symétries peuvent souvent faciliter le calcul des coordonnées de $G$.

**Définition**

On désigne ici par $\Gamma$ un point, une droite ou un plan de l'espace.

Le moment d'inertie de $D$ par rapport à $\Gamma$ est $I_\Gamma = \iiint_D d(M,\Gamma)^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où $d(M,\Gamma)$ est la distance du point courant $M(x,y,z)$ de $D$ à $\Gamma$.

**Remarques et exemples**

- Les moments d'inertie sont homogènes au produit d'une masse par le carré d'une distance.
- Le moment d'inertie de $D$ par rapport au plan $Oxy$ est $I_{0xy} = \iiint_D z^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Le moment d'inertie par rapport au plan $Oxz$ est $I_{0xz} = \iiint_D y^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Le moment d'inertie par rapport au plan $Oyz$ est $I_{0yz} = \iiint_D x^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Le moment d'inertie par rapport à l'axe $Ox$ est $I_{0x} = \iiint_D (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

  On constate que $I_{Ox} = I_{Oxy} + I_{Oxz}$.
- Le moment d'inertie par rapport à l'origine est $I_0 = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

  On constate que $I_0 = I_{Oxy} + I_{Oxz} + I_{Oyz}$.

# III Intégrales curvilignes

## III.1 Rappels

- On considère ici l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé. Un point $M$ de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet $(x, y, z)$ de ses coordonnées.
- Un arc paramétré $(I, \varphi)$ est la donnée d'un intervalle $I$ et d'une application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$.
- L'image de $t$ est notée $M(t)$. C'est le "point de paramètre $t$".
  On notera $x(t), y(t), z(t)$ les coordonnées de $M(t)$.
- L'ensemble des points $M(t)$, quand $t$ parcourt l'intervalle $I$, est appelé le support de l'arc.
- L'arc $(I, \varphi)$ est dit continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si $\varphi$ est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

## III.2 Définition

**Définition**

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans l'ouvert $\Omega$.
Soit $\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ une forme différentielle continue sur $\Omega$.
Pour tout $M$ de $\Omega$ la quantité $\omega(M)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall h = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \omega(M)(h) = \alpha P(M) + \beta Q(M) + \gamma R(M)$.
On appelle intégrale curviligne de $\omega$ le long de l'arc $\gamma$ le réel noté $\displaystyle\int_\gamma \omega$ égal à :

$$\int_a^b \omega(M(t))M'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(P(M(t))\,x'(t) + Q(M(t))\,y'(t) + R(M(t))\,z'(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

**Propriétés**

- La quantité $\displaystyle\int_\gamma \omega$ est linéaire par rapport à $\omega$.
- L'intégrale curviligne de $\omega$ sur un arc fermé ne dépend pas de l'origine choisie sur cet arc.
- On généralise facilement, par la relation de "Chasles", la définition de $\displaystyle\int_\gamma \omega$ au cas d'un arc $\gamma = (I, \varphi)$ où $\varphi$ est continue sur $I$ et seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

## III.3 Cas des formes exactes

**Proposition**

Soit $([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux de support contenu dans $\Omega$ ouvert.
Soient $A = M(a)$ et $B = M(b)$ l'origine et l'extrémité de l'arc $\gamma$.
Soit $\omega = \mathrm{d}f$ une forme différentielle exacte sur $\Omega$, où $f$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$.

**Remarques**

– L'intégrale curviligne d'une forme différentielle $\omega$ exacte sur un arc paramétré ne dépend que des extrémités de l'arc et est égale à l'accroissement d'une primitive quelconque de $\omega$.

– En particulier, si $\gamma$ est un arc fermé alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

# IV Notions d'analyse vectorielle

Soit $\mathcal{E}_3$ l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct.

Un point $M$ de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet $(x, y, z)$ de ses coordonnées.

On désigne par $\Omega$ un ouvert de $\mathcal{E}_3$.

## IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

**Définition**

Un *champ de scalaires* sur l'ouvert $\Omega$ est une application $f$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

**Remarques**

– On dit que ce champ est continu (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si l'application $f$ qui au point $M(x, y, z)$ associe $f(M) = f(x, y, z)$ est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$).

– Les surfaces d'équations $f(M) = \lambda$ sont appelées *surfaces de niveau* de $f$.

**Définition**

Un *champ de vecteurs* sur l'ouvert $\Omega$ est une application $E$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^3$.

**Remarques**

– Un champ de vecteurs $E$ est déterminé par trois champs de scalaires $P, Q, R$ :
$\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3, E(M) = (P(M), Q(M), R(M))$.

– Le champ $E$ est continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $\Leftrightarrow$ $P, Q, R$ sont continus (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

– Les *lignes de champ* de $E$ sont les arcs $\Gamma$ tels qu'en tout point $M$ de $\Gamma$, le vecteur $E(M)$ soit porté par la tangente en $M$ à l'arc $\Gamma$.

## IV.2 Circulation et gradient

**Définition** (Circulation d'un champ de vecteurs)

Au champ $E = (P, Q, R)$ correspond la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc paramétré de support inclus dans $\Omega$.

L'intégrale curviligne de $\omega$ sur l'arc $\gamma$ est appelée *circulation* du champ $E$ le long de cet arc.

Elle se note $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\gamma \omega = \int_a^b (P(M)\,x'(t) + Q(M)\,y'(t) + R(M)\,z'(t))\,\mathrm{d}t$.

**Définition** (Gradient d'un champ de scalaires)

Soit $f$ un champ de scalaires sur l'ouvert $\Omega$ de $\mathcal{E}_3$, de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle *gradient* de $f$ le champ de vecteurs, noté $\mathrm{grad}(f)$, défini par :
$\forall M(x,y,z) \in \Omega, \mathrm{grad}(f)(M) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M), \dfrac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$

**Définition** (Champs de gradients)

On dit qu'un champ de vecteurs $E = (P,Q,R)$ est un *champ de gradients* sur $\Omega$ s'il existe un champ $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ tel que $E = \mathrm{grad}(f)$.

**Remarques**

– Le champ de vecteurs $E = (P,Q,R)$ est un champ de gradients $\Leftrightarrow$ la forme différentielle $w = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte.
  Plus précisément : $E = \mathrm{grad}(f) \Leftrightarrow \omega = \mathrm{d}f$.
– Si $E = \mathrm{grad}(f)$, on dit que $f$ est un *potentiel scalaire* du champ $E$. Les lignes de champs de $E$ sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de $f$, appelées ici *équipotentielles*.
– Soit $E = \mathrm{grad}(f)$ un champ de gradients. La circulation de $E$ le long de l'arc paramétré $\gamma = ([a,b],\varphi)$ est égale à $f(B) - f(A)$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel scalaire $f$.

## IV.3 Divergence et rotationnel

**Définition** (Divergence d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega$ de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *divergence* de $E$, et on note $\mathrm{div}(E)$, le champ de scalaires défini sur $\Omega$ par :
$\forall M \in \Omega, \mathrm{div}(E)(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(M) + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(M) + \dfrac{\partial R}{\partial z}(M).$

**Interprétation**

$\mathrm{div}(E)$ est le produit scalaire $\overrightarrow{i} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial x} + \overrightarrow{j} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial y} + \overrightarrow{k} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}$.

**Définition** (Rotationnel d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega$ de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *rotationnel* de $E$, le champ de vecteurs défini sur $\Omega$ par :
$\forall M \in \Omega, \mathrm{rot}(E)(M) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y}(M) - \dfrac{\partial Q}{\partial z}(M), \dfrac{\partial P}{\partial z}(M) - \dfrac{\partial R}{\partial x}(M), \dfrac{\partial Q}{\partial x}(M) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(M)\right)$

**Interprétation et notation**

– rot($E$) est le champ de vecteurs $\overrightarrow{i} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x} + \overrightarrow{j} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y} + \overrightarrow{k} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial z}$.

– Avec l'opérateur "Nabla" :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \operatorname{rot}(E) = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

**Définition** (Champs de rotationnels)

On dit qu'un champ de vecteurs $E$ de classe $\mathcal{C}^1$ est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs continu $F$ tel que, sur l'ouvert $\Omega$, on ait $E = \operatorname{rot}(F)$.

On dit alors que $E$ dérive du *potentiel vecteur* $F$.

**Définition** (Laplacien d'un champ de scalaires)

Soit $f$ un champ de scalaires, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\Omega$ de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *laplacien* de $f$ le champ de scalaires, noté $\Delta f$ défini par :

$\forall M \in \Omega, \Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M).$

**Remarques**

– On remarque que le champ $\Delta f$ s'écrit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$.

– On dit que $f$ est *harmonique* sur $\Omega$ si son laplacien $\Delta f$ est nul sur $\Omega$.

## IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle

– Soient $f, g$ des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient $E, F$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.
On a les égalités suivantes :
  - ◇ $\operatorname{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{grad}(f) + \mu \operatorname{grad}(g)$
  - ◇ $\operatorname{grad}(fg) = f\operatorname{grad}(g) + g\operatorname{grad}(f)$
  - ◇ $\operatorname{div}(\lambda E + \lambda F) = \lambda \operatorname{div}(E) + \mu \operatorname{div}(F)$
  - ◇ $\operatorname{rot}(\lambda E + \mu F) = \lambda \operatorname{rot}(E) + \mu \operatorname{rot}(F)$
  - ◇ $\operatorname{div}(fE) = f\operatorname{div}(E) + < \operatorname{grad}(f), E >$
  - ◇ $\operatorname{rot}(fE) = f\operatorname{rot}(E) + \operatorname{grad}(f) \wedge E$
  - ◇ $\operatorname{div}(E \wedge F) = < F, \operatorname{rot}(E) > - < E, \operatorname{rot}(F) >$

– Soient $f, g$ des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient $E, F$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$.
On a les égalités suivantes :

- ◇ $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$
- ◇ $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2 < \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) >$
- ◇ $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(E)) = 0$
- ◇ $\mathrm{rot}(f\mathrm{grad}(g)) = \mathrm{grad}(f) \wedge \mathrm{grad}(g)$

## IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Les champs sont supposés définis sur un ouvert $\Omega$ de $\mathcal{E}_3$.

**Proposition**

Si le champ $E$, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de rotationnels alors $\mathrm{div}(E) \equiv 0$.

La réciproque est vraie si l'ouvert $\Omega$ est étoilé. Les potentiels vecteurs de $E$ sont alors les champs $F = F_0 + \mathrm{grad}(f)$, où $F_0$ est un potentiel vecteur particulier et où $f$ est un champ scalaire quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

**Proposition**

Si le champ $E$, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de gradients alors $\mathrm{rot}(E) \equiv 0$.

Si $\Omega$ est étoilé, la réciproque est vraie : les potentiels scalaires de $E$ sont alors les champs $f = f_0 + \lambda$, où $f_0$ est un potentiel scalaire particulier et où $\lambda$ est un champ scalaire constant quelconque.