Compléments de calcul intégral

Sommaire

I Intégrales doubles ou triples 2
I.1 Intégrales doubles : théorèmes de Fubini 2
I.2 Intégrales doubles : Changement de variables 2
I.3 Formule de Grien-Riemann et applications 3
I.4 Intégrales triples : Théorèmes de Fubini 3
I.5 Intégrales triples : Changement de variables 4
II Centres et moments d'inertie 5
II.1 Cas d'une plaque plane 5
II.2 Cas d'un solide en dimension 3 6
III Intégrales curvilignes 8
III.1 Rappels 8
III.2 Définition 8
III.3 Cas des formes exactes 8
IV Notions d'analyse vectorielle 10
IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs 10
IV.2 Circulation et gradient 10
IV.3 Divergence et rotationnel 11
IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle 12
IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs 13

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I Intégrales doubles ou triples

I.1 Intégrales doubles : théorèmes de Fubini

Théorème

Soient u, v deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $u \leq v$.
Soit Δ le compact du plan défini par : $a \leq x \leq b$ et $u(x) \leq y \leq v(x)$.
Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Théorème

Soient u, v deux applications continues de $[c,d]$ dans $\mathbb{R}$, avec $u \leq v$.
Soi Δ le compact du plan défini par : $c \leq y \leq d$ et $u(y) \leq x \leq v(y)$.
Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$

Cas particuliers

– Soit Δ le compact $[a,b] \times [c,d]$. Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue.
On a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

– Supposons notamment que $f(x,y) \equiv \varphi(x)\psi(y)$, où φ et ψ sont continues.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y.$

I.2 Intégrales doubles : Changement de variables

Proposition

Soit f une application continue sur le compact Δ, inclus dans l'ouvert V.
Soient D un compact inclus dans l'ouvert U et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(D) = \Delta$.
On suppose que φ est injective ou sinon que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents a une aire nulle.
On note $(u,v) \mapsto \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ ce changement de variables.
Soit $J(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le jacobien de φ en un point quelconque de U.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Passage en coordonnées polaires

La formule s'écrit : $\iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

I.3 Formule de Grien-Riemann et applications

Proposition

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^2$, de frontière δ. On suppose que δ est sans point double, et orientée dans le sens positif : si on suit cette frontière orientée, on laisse Δ sur sa gauche.
Soit $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant Δ.
Alors $\displaystyle\int_{\delta}\omega = \int_{\delta} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Conséquences

– *Aires planes se ramenant à des intégrales curvilignes*
Avec les notations ci-dessus, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de Δ s'obtient par :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{\delta} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\delta} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\delta}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

– *Calcul des aires de domaines définis en coordonnées polaires*
Soit Δ le domaine du plan limité par les demi-droites issues de O d'angles polaires $\theta_1 \leq \theta_2$, et par la courbe d'équation $\rho = \rho(\theta) \geq 0$.
Alors l'aire de Δ s'écrit : $\mathcal{A}(\Delta) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$

I.4 Intégrales triples : Théorèmes de Fubini

Théorème

Soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ et u, v deux applications continues de D dans $\mathbb{R}$.
Soit Δ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par : $(x,y)\in D,\ u(x,y)\leq z\leq v(x,y)$.
Soit f une application continue définie sur Δ, à valeurs réelles.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D}\left(\int_{u(x,y)} v(x,y) f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Théorème

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^3$ limité inférieurement par $z=a$ et supérieurement par $z=b$.
Pour tout z de $[a,b]$ soit $D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y,z)\in\Delta\}$.
Soit f une application continue définie sur Δ, à valeurs réelles.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^c\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Cas particuliers

– Soit Δ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par $\Delta = [p,q] \times [r,s] \times [t,u]$.

Alors, par exemple : $\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_t^u \left(\int_r^s \left(\int_p^q f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z.$

– En particulier, si $f(x,y,z) \equiv \varphi(x)\psi(y)\xi(z)$, où φ, ψ, ξ sont continues :
$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_p^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_r^s \psi(y)\,\mathrm{d}y \int_t^u \xi(z)\,\mathrm{d}z.$

I.5 Intégrales triples : Changement de variables

Proposition

Soit f une application continue sur le compact Δ, inclus dans l'ouvert V.
Soient D un compact inclus dans l'ouvert U et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(D) = \Delta$.
On suppose que φ est injective ou sinon que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents a un volume nul.
On note $(u,v,w) \mapsto \varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.
Soit $J(u,v,w) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ le jacobien de φ en un point quelconque de U.
Alors on a l'égalité :
$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Exemples

– *Passage en coordonnées cylindriques*

La formule s'écrit : $\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,d\theta\,\mathrm{d}z.$

– *Passage en coordonnées sphériques*

Avec $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, et $z = r\cos\varphi$, où θ désigne la longitude et φ la colatitude, et en notant g l'application définie par $g(r,\theta,\varphi) = f(x,y,z)$, la formule devient :
$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D g(r,\theta,\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II Centres et moments d'inertie

II.1 Cas d'une plaque plane

On définit ici les éléments d'inertie d'une plaque du plan Oxy limitée par un compact D, et "recouverte" d'une densité surfacique $\mu(x,y) \geq 0$.

Définition

La masse d'une plaque plane est l'intégrale de sa densité : $m(D) = \iint \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Remarque

On suppose que la plaque est homogène, c'est-à-dire recouverte d'une densité constante μ.
Alors $m(D) = \mu A(D)$, où $A(D) = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est l'aire de D.

Définition

Le centre d'inertie G de la plaque D est défini par $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m(D)} \iint_D \overrightarrow{0M}\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où $M = (x,y)$ est un point parcourant D et où $m(D)$ est la masse de la plaque D.

Remarques

- Si D est homogène alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{A(D)} \iint_D \overrightarrow{0M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $A(D)$ est l'aire de la plaque D.
- Les coordonnées de G s'obtiennent par projection :
  $x_G = \dfrac{1}{m(D)} \iint_D x\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, et $y_G = \dfrac{1}{m(D)} \iint_D y\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
  Et dans le cas d'une plaque homogène :
  $x_G = \dfrac{1}{A(D)} \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, et $y_G = \dfrac{1}{A(D)} \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Des considérations de symétrie peuvent souvent faciliter le calcul des coordonnées de G.

Définition

Soit D un compact du plan. On désigne ici par Γ un point ou une droite du plan.
Le moment d'inertie de D par rapport à Γ est $I_\Gamma = \iint_D d(M,\Gamma)^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où $d(M,\Gamma)$ est la distance du point courant $M(x,y)$ de D à Γ.

Remarques et exemples

- Les moments d'inertie sont homogènes au produit d'une masse par le carré d'une distance.
- Le moment d'inertie de D par rapport à l'axe Ox est $I_{0x} = \iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Le moment d'inertie de D par rapport à l'axe Oy est $I_{Oy} = \iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Le moment d'inertie de D par rapport à O est $I_O = \iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_{0x} + I_{0y}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.2 Cas d'un solide en dimension 3

On définit ici les éléments d'inertie d'un solide de l'espace Oxy limité par un compact D, et muni d'une densité volumique $\mu(x,y,z) \geq 0$.

Définition

La masse du solide D est l'intégrale de sa densité : $m(D) = \iiint_D \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Remarque

Supposons que le solide D soit homogène, c'est-à-dire de densité constante μ.

Alors la masse de D est $m(D) = \mu V(D)$, où $V(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est le volume de D.

Définition

Le centre d'inertie du solide D est le point G défini par :
$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D \overrightarrow{0M}\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Remarques

- Si D est homogène alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{V(D)} \iiint_D \overrightarrow{0M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $V(D)$ est le volume de D.
- Les coordonnées de G s'obtiennent par projection :
  $x_G = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $y_G = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
  et $z_G = \dfrac{1}{m(D)} \iiint_D z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Dans le cas d'une plaque homogène :
  $x_G = \dfrac{1}{A(D)} \iiint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ $y_G = \dfrac{1}{A(D)} \iiint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
  $z_G = \dfrac{1}{A(D)} \iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- Des considérations de symétries peuvent souvent faciliter le calcul des coordonnées de G.

Définition

On désigne ici par Γ un point, une droite ou un plan de l'espace.

Le moment d'inertie de D par rapport à Γ est $I_\Gamma = \iiint_D d(M,\Gamma)^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où $d(M,\Gamma)$ est la distance du point courant $M(x,y,z)$ de D à Γ.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques et exemples

– Les moments d'inertie sont homogènes au produit d'une masse par le carré d'une distance.

– Le moment d'inertie de D par rapport au plan Oxy est $I_{0xy} = \iiint_D z^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

– Le moment d'inertie par rapport au plan Oxz est $I_{0xz} = \iiint_D y^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

– Le moment d'inertie par rapport au plan Oyz est $I_{0yz} = \iiint_D x^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

– Le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox est $I_{0x} = \iiint_D (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
On constate que $I_{Ox} = I_{Oxy} + I_{Oxz}$.

– Le moment d'inertie par rapport à l'origine est $I_0 = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
On constate que $I_0 = I_{Oxy} + I_{Oxz} + I_{Oyz}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III Intégrales curvilignes

III.1 Rappels

- On considère ici l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé. Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.
- Un arc paramétré (I, φ) est la donnée d'un intervalle I et d'une application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$.
- L'image de t est notée $M(t)$. C'est le "point de paramètre t".
  On notera $x(t), y(t), z(t)$ les coordonnées de $M(t)$.
- L'ensemble des points $M(t)$, quand t parcourt l'intervalle I, est appelé le support de l'arc.
- L'arc (I, φ) est dit continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si φ est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

III.2 Définition

Définition

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans l'ouvert Ω.
Soit $\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ une forme différentielle continue sur Ω.
Pour tout M de Ω la quantité $\omega(M)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall h = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \omega(M)(h) = \alpha P(M) + \beta Q(M) + \gamma R(M)$.
On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc γ le réel noté $\displaystyle\int_\gamma \omega$ égal à :

$$\int_a^b \omega(M(t))M'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(P(M(t))\,x'(t) + Q(M(t))\,y'(t) + R(M(t))\,z'(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Propriétés

- La quantité $\displaystyle\int_\gamma \omega$ est linéaire par rapport à ω.
- L'intégrale curviligne de ω sur un arc fermé ne dépend pas de l'origine choisie sur cet arc.
- On généralise facilement, par la relation de "Chasles", la définition de $\displaystyle\int_\gamma \omega$ au cas d'un arc $\gamma = (I, \varphi)$ où φ est continue sur I et seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

III.3 Cas des formes exactes

Proposition

Soit $([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux de support contenu dans Ω ouvert.
Soient $A = M(a)$ et $B = M(b)$ l'origine et l'extrémité de l'arc γ.
Soit $\omega = \mathrm{d}f$ une forme différentielle exacte sur Ω, où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques

– L'intégrale curviligne d'une forme différentielle ω exacte sur un arc paramétré ne dépend que des extrémités de l'arc et est égale à l'accroissement d'une primitive quelconque de ω.

– En particulier, si γ est un arc fermé alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

IV Notions d'analyse vectorielle

Soit $\mathcal{E}_3$ l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct.

Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.

On désigne par Ω un ouvert de $\mathcal{E}_3$.

IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

Définition

Un *champ de scalaires* sur l'ouvert Ω est une application f de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- On dit que ce champ est continu (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe $f(M) = f(x, y, z)$ est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$).
- Les surfaces d'équations $f(M) = \lambda$ sont appelées *surfaces de niveau* de f.

Définition

Un *champ de vecteurs* sur l'ouvert Ω est une application E de Ω dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques

- Un champ de vecteurs E est déterminé par trois champs de scalaires P, Q, R :
  $\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3, E(M) = (P(M), Q(M), R(M))$.
- Le champ E est continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $\Leftrightarrow$ P, Q, R sont continus (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).
- Les *lignes de champ* de E sont les arcs Γ tels qu'en tout point M de Γ, le vecteur $E(M)$ soit porté par la tangente en M à l'arc Γ.

IV.2 Circulation et gradient

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs)

Au champ $E = (P, Q, R)$ correspond la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc paramétré de support inclus dans Ω.

L'intégrale curviligne de ω sur l'arc γ est appelée *circulation* du champ E le long de cet arc.

Elle se note $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\gamma \omega = \int_a^b (P(M)\,x'(t) + Q(M)\,y'(t) + R(M)\,z'(t))\,\mathrm{d}t.$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition (Gradient d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$, de classe $\mathcal{C}^1$.

On appelle *gradient* de f le champ de vecteurs, noté $\text{grad}(f)$, défini par :

$$\forall M(x,y,z) \in \Omega, \text{grad}(f)(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$$

Définition (Champs de gradients)

On dit qu'un champ de vecteurs $E = (P,Q,R)$ est un *champ de gradients* sur Ω s'il existe un champ f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω tel que $E = \text{grad}(f)$.

Remarques

- Le champ de vecteurs $E = (P,Q,R)$ est un champ de gradients $\Leftrightarrow$ la forme différentielle $w = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte.
  Plus précisément : $E = \text{grad}(f) \Leftrightarrow \omega = \mathrm{d}f$.
- Si $E = \text{grad}(f)$, on dit que f est un *potentiel scalaire* du champ E. Les lignes de champs de E sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de f, appelées ici *équipotentielles*.
- Soit $E = \text{grad}(f)$ un champ de gradients. La circulation de E le long de l'arc paramétré $\gamma = ([a,b], \varphi)$ est égale à $f(B) - f(A)$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel scalaire f.

IV.3 Divergence et rotationnel

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *divergence* de E, et on note $\text{div}(E)$, le champ de scalaires défini sur Ω par :

$$\forall M \in \Omega, \text{div}(E)(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M).$$

Interprétation

$\text{div}(E)$ est le produit scalaire $\overrightarrow{i} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial x} + \overrightarrow{j} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial y} + \overrightarrow{k} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}$.

Définition (Rotationnel d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *rotationnel* de E, le champ de vecteurs défini sur Ω par :

$$\forall M \in \Omega, \text{rot}(E)(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M), \frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M), \frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M)\right)$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Interprétation et notation

– $\text{rot}(E)$ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{i} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x} + \overrightarrow{j} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y} + \overrightarrow{k} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial z}$.

– Avec l'opérateur "Nabla" :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \ \text{rot}(E) = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Définition (Champs de rotationnels)

On dit qu'un champ de vecteurs E de classe $\mathcal{C}^1$ est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs continu F tel que, sur l'ouvert Ω, on ait $E = \text{rot}(F)$.
On dit alors que E dérive du *potentiel vecteur* F.

Définition (Laplacien d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *laplacien* de f le champ de scalaires, noté Δf défini par :
$\forall M \in \Omega, \Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$.

Remarques

– On remarque que le champ Δf s'écrit $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f))$.

– On dit que f est *harmonique* sur Ω si son laplacien Δf est nul sur Ω.

IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
On a les égalités suivantes :
◇ $\text{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{grad}(f) + \mu \text{grad}(g)$
◇ $\text{grad}(fg) = f\text{grad}(g) + g\text{grad}(f)$
◇ $\text{div}(\lambda E + \lambda F) = \lambda \text{div}(E) + \mu \text{div}(F)$
◇ $\text{rot}(\lambda E + \mu F) = \lambda \text{rot}(E) + \mu \text{rot}(F)$
◇ $\text{div}(fE) = f\text{div}(E) + < \text{grad}(f), E >$
◇ $\text{rot}(fE) = f\text{rot}(E) + \text{grad}(f) \wedge E$
◇ $\text{div}(E \wedge F) = < F, \text{rot}(E) > - < E, \text{rot}(F) >$

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
On a les égalités suivantes :

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$
- $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2 < \text{grad}(f), \text{grad}(g) >$
- $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$ et $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$
- $\text{rot}(f\text{grad}(g)) = \text{grad}(f) \wedge \text{grad}(g)$

IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Les champs sont supposés définis sur un ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de rotationnels alors $\text{div}(E) \equiv 0$.

La réciproque est vraie si l'ouvert Ω est étoilé. Les potentiels vecteurs de E sont alors les champs $F = F_0 + \text{grad}(f)$, où F_0 est un potentiel vecteur particulier et où f est un champ scalaire quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de gradients alors $\text{rot}(E) \equiv 0$.

Si Ω est étoilé, la réciproque est vraie : les potentiels scalaires de E sont alors les champs $f = f_0 + \lambda$, où f_0 est un potentiel scalaire particulier et où λ est un champ scalaire constant quelconque.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021