

III Intégrales curvilignes

III.1 Rappels

- On considère ici l'espace affine euclidien \mathcal{E}_3 de dimension 3, identifié à \mathbb{R}^3 par le choix d'un repère orthonormé. Un point M de \mathcal{E}_3 est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.
- Un arc paramétré (I, φ) est la donnée d'un intervalle I et d'une application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_3$.
- L'image de t est notée $M(t)$. C'est le "point de paramètre t ".
On notera $x(t), y(t), z(t)$ les coordonnées de $M(t)$.
- L'ensemble des points $M(t)$, quand t parcourt l'intervalle I , est appelé le support de l'arc.
- L'arc (I, φ) est dit continu (resp. de classe \mathcal{C}^k) si φ est continue (resp. de classe \mathcal{C}^k).

III.2 Définition

Définition

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc \mathcal{C}^1 de support contenu dans l'ouvert Ω .

Soit $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ une forme différentielle continue sur Ω .

Pour tout M de Ω la quantité $\omega(M)$ est donc une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$\forall h = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \omega(M)(h) = \alpha P(M) + \beta Q(M) + \gamma R(M).$$

On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc γ le réel noté $\int_{\gamma} \omega$ égal à :

$$\int_a^b \omega(M(t)) M'(t) dt = \int_a^b (P(M(t)) x'(t) + Q(M(t)) y'(t) + R(M(t)) z'(t)) dt.$$

Propriétés

- La quantité $\int_{\gamma} \omega$ est linéaire par rapport à ω .
- L'intégrale curviligne de ω sur un arc fermé ne dépend pas de l'origine choisie sur cet arc.
- On généralise facilement, par la relation de "Chasles", la définition de $\int_{\gamma} \omega$ au cas d'un arc $\gamma = (I, \varphi)$ où φ est continue sur I et seulement \mathcal{C}^1 par morceaux.

III.3 Cas des formes exactes

Proposition

Soit $([a, b], \varphi)$ un arc \mathcal{C}^1 par morceaux de support contenu dans Ω ouvert.

Soient $A = M(a)$ et $B = M(b)$ l'origine et l'extrémité de l'arc γ .

Soit $\omega = df$ une forme différentielle exacte sur Ω , où f est une application de classe \mathcal{C}^1 .

Alors on a l'égalité : $\int_{\gamma} \omega = f(B) - f(A)$.

**Remarques**

- L'intégrale curviligne d'une forme différentielle ω exacte sur un arc paramétré ne dépend que des extrémités de l'arc et est égale à l'accroissement d'une primitive quelconque de ω .
- En particulier, si γ est un arc fermé alors $\int_{\gamma} \omega = 0$.