III Intégrales curvilignes

III.1 Rappels

- On considère ici l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé. Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.
- Un arc paramétré (I, φ) est la donnée d'un intervalle I et d'une application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$.
- L'image de t est notée $M(t)$. C'est le "point de paramètre t".
  On notera $x(t), y(t), z(t)$ les coordonnées de $M(t)$.
- L'ensemble des points $M(t)$, quand t parcourt l'intervalle I, est appelé le support de l'arc.
- L'arc (I, φ) est dit continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si φ est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

III.2 Définition

Définition

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans l'ouvert Ω.
Soit $\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ une forme différentielle continue sur Ω.
Pour tout M de Ω la quantité $\omega(M)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall h = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \omega(M)(h) = \alpha P(M) + \beta Q(M) + \gamma R(M)$.
On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc γ le réel noté $\displaystyle\int_\gamma \omega$ égal à :

$$\int_a^b \omega(M(t))M'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(P(M(t))\,x'(t) + Q(M(t))\,y'(t) + R(M(t))\,z'(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Propriétés

- La quantité $\displaystyle\int_\gamma \omega$ est linéaire par rapport à ω.
- L'intégrale curviligne de ω sur un arc fermé ne dépend pas de l'origine choisie sur cet arc.
- On généralise facilement, par la relation de "Chasles", la définition de $\displaystyle\int_\gamma \omega$ au cas d'un arc $\gamma = (I, \varphi)$ où φ est continue sur I et seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

III.3 Cas des formes exactes

Proposition

Soit $([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux de support contenu dans Ω ouvert.
Soient $A = M(a)$ et $B = M(b)$ l'origine et l'extrémité de l'arc γ.
Soit $\omega = \mathrm{d}f$ une forme différentielle exacte sur Ω, où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$.

Remarques

– L'intégrale curviligne d'une forme différentielle ω exacte sur un arc paramétré ne dépend que des extrémités de l'arc et est égale à l'accroissement d'une primitive quelconque de ω.

– En particulier, si γ est un arc fermé alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.