# III Intégrales curvilignes

## III.1 Rappels

- On considère ici l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé. Un point $M$ de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet $(x, y, z)$ de ses coordonnées.
- Un arc paramétré $(I, \varphi)$ est la donnée d'un intervalle $I$ et d'une application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$.
- L'image de $t$ est notée $M(t)$. C'est le "point de paramètre $t$".
  On notera $x(t), y(t), z(t)$ les coordonnées de $M(t)$.
- L'ensemble des points $M(t)$, quand $t$ parcourt l'intervalle $I$, est appelé le support de l'arc.
- L'arc $(I, \varphi)$ est dit continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si $\varphi$ est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

## III.2 Définition

**Définition**

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans l'ouvert $\Omega$.
Soit $\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ une forme différentielle continue sur $\Omega$.
Pour tout $M$ de $\Omega$ la quantité $\omega(M)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall h = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \omega(M)(h) = \alpha P(M) + \beta Q(M) + \gamma R(M)$.
On appelle intégrale curviligne de $\omega$ le long de l'arc $\gamma$ le réel noté $\displaystyle\int_\gamma \omega$ égal à :

$$\int_a^b \omega(M(t))M'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(P(M(t))\,x'(t) + Q(M(t))\,y'(t) + R(M(t))\,z'(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

**Propriétés**

- La quantité $\displaystyle\int_\gamma \omega$ est linéaire par rapport à $\omega$.
- L'intégrale curviligne de $\omega$ sur un arc fermé ne dépend pas de l'origine choisie sur cet arc.
- On généralise facilement, par la relation de "Chasles", la définition de $\displaystyle\int_\gamma \omega$ au cas d'un arc $\gamma = (I, \varphi)$ où $\varphi$ est continue sur $I$ et seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

## III.3 Cas des formes exactes

**Proposition**

Soit $([a, b], \varphi)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux de support contenu dans $\Omega$ ouvert.
Soient $A = M(a)$ et $B = M(b)$ l'origine et l'extrémité de l'arc $\gamma$.
Soit $\omega = \mathrm{d}f$ une forme différentielle exacte sur $\Omega$, où $f$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

**Remarques**

– L'intégrale curviligne d'une forme différentielle $\omega$ exacte sur un arc paramétré ne dépend que des extrémités de l'arc et est égale à l'accroissement d'une primitive quelconque de $\omega$.

– En particulier, si $\gamma$ est un arc fermé alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021