IV Notions d'analyse vectorielle

Soit $\mathcal{E}_3$ l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct.

Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.

On désigne par Ω un ouvert de $\mathcal{E}_3$.

IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

Définition

Un *champ de scalaires* sur l'ouvert Ω est une application f de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- On dit que ce champ est continu (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe $f(M) = f(x, y, z)$ est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$).
- Les surfaces d'équations $f(M) = \lambda$ sont appelées *surfaces de niveau* de f.

Définition

Un *champ de vecteurs* sur l'ouvert Ω est une application E de Ω dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques

- Un champ de vecteurs E est déterminé par trois champs de scalaires P, Q, R : $\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3, E(M) = (P(M), Q(M), R(M))$.
- Le champ E est continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $\Leftrightarrow P, Q, R$ sont continus (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).
- Les *lignes de champ* de E sont les arcs Γ tels qu'en tout point M de Γ, le vecteur $E(M)$ soit porté par la tangente en M à l'arc Γ.

IV.2 Circulation et gradient

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs)

Au champ $E = (P, Q, R)$ correspond la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc paramétré de support inclus dans Ω.

L'intégrale curviligne de ω sur l'arc γ est appelée *circulation* du champ E le long de cet arc.

Elle se note $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\gamma \omega = \int_a^b (P(M)\,x'(t) + Q(M)\,y'(t) + R(M)\,z'(t))\,\mathrm{d}t.$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition (Gradient d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$, de classe $\mathcal{C}^1$.

On appelle *gradient* de f le champ de vecteurs, noté $\text{grad}(f)$, défini par :

$$\forall M(x,y,z) \in \Omega, \text{grad}(f)(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$$

Définition (Champs de gradients)

On dit qu'un champ de vecteurs $E = (P,Q,R)$ est un *champ de gradients* sur Ω s'il existe un champ f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω tel que $E = \text{grad}(f)$.

Remarques

- Le champ de vecteurs $E = (P,Q,R)$ est un champ de gradients $\Leftrightarrow$ la forme différentielle $w = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte.
  Plus précisément : $E = \text{grad}(f) \Leftrightarrow \omega = \mathrm{d}f$.
- Si $E = \text{grad}(f)$, on dit que f est un *potentiel scalaire* du champ E. Les lignes de champs de E sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de f, appelées ici *équipotentielles*.
- Soit $E = \text{grad}(f)$ un champ de gradients. La circulation de E le long de l'arc paramétré $\gamma = ([a,b], \varphi)$ est égale à $f(B) - f(A)$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel scalaire f.

IV.3 Divergence et rotationnel

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *divergence* de E, et on note $\text{div}(E)$, le champ de scalaires défini sur Ω par :

$$\forall M \in \Omega, \text{div}(E)(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M).$$

Interprétation

$\text{div}(E)$ est le produit scalaire $\vec{i} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial x} + \vec{j} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial y} + \vec{k} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}$.

Définition (Rotationnel d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *rotationnel* de E, le champ de vecteurs défini sur Ω par :

$$\forall M \in \Omega, \text{rot}(E)(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M), \frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M), \frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M)\right)$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Interprétation et notation

– $\text{rot}(E)$ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{i} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x} + \overrightarrow{j} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y} + \overrightarrow{k} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial z}$.

– Avec l'opérateur "Nabla" :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \ \text{rot}(E) = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Définition (Champs de rotationnels)

On dit qu'un champ de vecteurs E de classe $\mathcal{C}^1$ est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs continu F tel que, sur l'ouvert Ω, on ait $E = \text{rot}(F)$.
On dit alors que E dérive du *potentiel vecteur* F.

Définition (Laplacien d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *laplacien* de f le champ de scalaires, noté Δf défini par :
$\forall M \in \Omega, \Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$.

Remarques

– On remarque que le champ Δf s'écrit $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f))$.

– On dit que f est *harmonique* sur Ω si son laplacien Δf est nul sur Ω.

IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
On a les égalités suivantes :
◇ $\text{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{grad}(f) + \mu \text{grad}(g)$
◇ $\text{grad}(fg) = f\text{grad}(g) + g\text{grad}(f)$
◇ $\text{div}(\lambda E + \lambda F) = \lambda \text{div}(E) + \mu \text{div}(F)$
◇ $\text{rot}(\lambda E + \mu F) = \lambda \text{rot}(E) + \mu \text{rot}(F)$
◇ $\text{div}(fE) = f\text{div}(E) + < \text{grad}(f), E >$
◇ $\text{rot}(fE) = f\text{rot}(E) + \text{grad}(f) \wedge E$
◇ $\text{div}(E \wedge F) = < F, \text{rot}(E) > - < E, \text{rot}(F) >$

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
On a les égalités suivantes :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$
- $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2 < \text{grad}(f), \text{grad}(g) >$
- $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$ et $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$
- $\text{rot}(f\text{grad}(g)) = \text{grad}(f) \wedge \text{grad}(g)$

IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Les champs sont supposés définis sur un ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de rotationnels alors $\text{div}(E) \equiv 0$.

La réciproque est vraie si l'ouvert Ω est étoilé. Les potentiels vecteurs de E sont alors les champs $F = F_0 + \text{grad}(f)$, où F_0 est un potentiel vecteur particulier et où f est un champ scalaire quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de gradients alors $\text{rot}(E) \equiv 0$.

Si Ω est étoilé, la réciproque est vraie : les potentiels scalaires de E sont alors les champs $f = f_0 + \lambda$, où f_0 est un potentiel scalaire particulier et où λ est un champ scalaire constant quelconque.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021