II Fonctions intégrables à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Notations préliminaires

Applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On définit les applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ de la manière suivante :
$\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|, (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re} f(x), (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f(x)$.
– Si f est continue par morceaux sur I, alors $|f|$, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont aussi.

Applications f^+ et f^-.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On définit les applications f^+ et f^- de la manière suivante :
$\forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.
On vérifie alors les égalités $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
– L'application f est continue par morceaux sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- le sont.

II.2 Intégrabilité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est intégrable sur I si l'application $|f|$ est intégrable.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Intégrabilité par domination)*

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ une application intégrable. On suppose que $|f| \leq \varphi$ sur I.
Alors l'application f est intégrable sur I.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Conséquences

Soient f et g deux applications de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$, et si $f = O_b(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- On suppose que les applications f et g sont équivalentes au voisinage de b.
  Alors f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow g$ est intégrable sur $[a, b[$.

II.3 Utilisation des intégrales de Riemann

Intégrabilité sur $]a, b]$

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.

Soit f une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux (le "problème" est en a.)

- Si $(x-a)^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de a avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha < 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$.
- Si $|(x-a)f(x)| \geq M > 0$ au voisinage de a, alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)f(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \infty$.

Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Soient a un nombre réel, et f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

- Si $x^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha > 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$.
- Si $|xf(x)| \geq M > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $x \mapsto \dfrac{\tanh x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 1$.

Intégrales de Bertrand

Soient α et β deux réels, et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \left|\ln^\beta x\right|}$.

- f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow (\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.
- f est intégrable sur $[2, +\infty[\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.4 Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes

On a défini ce qu'est une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, mais on n'a pas encore défini ce qu'on appelle l'intégrale sur I d'une telle fonction.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs réelles)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs complexes)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I \mathrm{Re}\, f + i \int_I \mathrm{Im}\, f$.

Remarques

- Si $I = \{a\}$, toute application définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Si f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, elle est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale coïncide avec la valeur obtenue dans le chapitre "intégration et dérivation".

II.5 Propriétés de l'intégrale

Proposition *(Linéarité de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
Soient α et β deux scalaires. On sait déjà que $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I.
De plus on a l'égalité : $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_J g$.

Proposition *(Inégalité de la valeur absolue)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Alors on a l'inégalité : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Proposition *(Utilisation d'une suite exhaustive de sous-segments)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$.
Soit (J_n) une suite croissante de segments telle que $I = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} J_n$. Alors $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Exemple

On définit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est intégrable sur $]0,1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$, et sur $[1,+\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = 0$.

On vérifie que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{[1/n,n]} f = 0$ (changement de variable $t = \frac{1}{n}$.)

La suite des $J_n = [\frac{1}{n}, n]$ est exhaustive dans $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit le résultat : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} f = 0$.

Proposition *(Utilisation d'une partition de l'intervalle)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Propriétés diverses

– *Intégrale de la conjuguée d'une application*
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application intégrable. Soit $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.
Alors $\bar{f}$ est intégrable sur I et on a l'égalité : $\displaystyle\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.

– *Intégrale sur un sous-intervalle*
Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$, et J un sous-intervalle de I.
On note χ_J la *fonction caractéristique* de J, définie par : $\chi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$.
Alors f est intégrable sur J et $\displaystyle\int_J f = \int_I (\chi_J f)$.

– Applications "nulles presque partout"
Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f est nulle sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Alors f est intégrable sur I et son intégrale sur cet intervalle est nulle.

– Applications "égales presque partout"
Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, l'application f étant intégrable.
Si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I g = \int_I f$.

II.6 Notation définitive de l'intégrale

Notation

Soit f une application intégrable de $I =]a,b[$ dans $\mathbb{K}$, avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
On note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. De même on pose $\displaystyle\int_b^a f = -\int_{]a,b[} f$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques

– Pour tout c où f est définie, on convient que $\int_c^c f = 0$.

– On note fréquemment $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (x ou toute variable "muette") plutôt que $\int_a^b f$.

Cette notation est bien adaptée aux différentes méthodes de calcul des intégrales (en particulier le calcul par changement de variable.)

Proposition *(relation de Chasles)*

Si f est intégrable sur $]a,b[$ et si $a<c<b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Plus généralement, si f est intégrable sur un intervalle I, cette relation reste vraie pour trois points quelconques a, b, c de I (deux d'entre eux pouvant être les extrémités de I).

Proposition *(Calcul d'une intégrale par changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles ouverts, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de J sur I.

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ l'application $\varphi'\ f\circ\varphi$ est intégrable sur I.

Dans ce cas, on a l'égalité : $\int_I f = \int_J |\varphi'|\ f\circ\varphi$.

Pour tous éléments a et b de J, on peut alors écrire : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

Exemple

Soit φ le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ défini par $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}$.

Le changement de variable $x=\varphi(t)$ permet de constater que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

II.7 Extension de la notion d'intégrale

Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

Soit F l'application définie sur $[a,b[$ par : $\forall x \geq a, F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il se peut que f ne soit pas intégrable sur $[a,b[$, mais que F possède une limite finie en b.

Dans ce cas cette limite est encore notée (mais de façon impropre) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple

– On vérifie que l'application $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

– Pourtant on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$.

– On notera donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$ (mais on parle d'intégrale impropre.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021