III Convergences de suites de fonctions intégrables

III.1 Convergence en moyenne ou en moyenne quadratique

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.
L'application $f \mapsto N(f) = \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur cet espace vectoriel.
On l'appelle la *norme de la convergence en moyenne*.

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est *de carré intégrable* sur I si $|f|^2$ est une fonction intégrable sur I.
On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I.

Propriétés

- Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, alors leur produit fg est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I est un espace vectoriel.
L'application $(f, g) \mapsto < f, g > = \displaystyle\int_I \bar{f} g$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
La norme déduite de ce produit scalaire est définie par $N_2(f) = \left(\displaystyle\int_I |f|^2\right)^{1/2}$.
On l'appelle norme de la *convergence en moyenne quadratique*.

Proposition

Soient f et g deux applications continues et de carré intégrable sur I.
Alors on a les inégalités : $|< f, g >| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)\, N_2(g)$ (Cauchy-Schwarz).

Conséquence

Le produit scalaire est une application continue pour N_2. Autrement dit :
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = g$ (au sens de la norme N_2), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} < f_n, g_n > = < f, g >$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.2 Théorèmes de convergence

Théorème *(Théorème de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que cette suite est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
On suppose en outre que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux.
Alors l'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0}$ est majorée.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Proposition *(Interversion d'une série et d'une intégrale)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, de somme S continue par morceaux.
On suppose en outre que la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n|$ est convergente.
Alors S est intégrable sur I. De plus on a : $\displaystyle N_1(S) \leq \sum_{n=0}^{\infty} N_1(f_n)$ et $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

On n'omettra cependant pas de vérifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.

Théorème *(Théorème de convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que cette suite est simplement convergente sur I vers une application f continue par morceaux.
On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.
Alors l'application f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

Mais on n'oubliera pas l'*hypothèse de domination* : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021