

IV Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition (Continuité sous le signe intégral)

Soit J un intervalle de \mathbb{R} et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ une application continue de $J \times [a, b]$ dans \mathbb{K} .

On suppose qu'il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue intégrable sur $[a, b]$, telle que :

$\forall x \in J, \forall t \in [a, b], |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

On peut alors définir une application g de J dans \mathbb{K} par $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$.

Cette application est continue sur J .

Remarque

Le résultat précédent est encore valable même si l'hypothèse de domination est seulement vérifiée sur tout segment de J .

Proposition (Dérivation sous le signe intégral)

Soit J un intervalle de \mathbb{R} et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ une application continue de $J \times [a, b]$ dans \mathbb{K} .

On suppose que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a, b]$.

On suppose qu'il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, continues intégrables telles que :

$\forall x \in J, \forall t \in [a, b], |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$.

On peut alors définir une application g de J dans \mathbb{K} par $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$.

L'application g est de classe \mathcal{C}^1 sur J et : $\forall x \in J, g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ (Leibniz).

Remarque

Ce résultat reste valable même si les hypothèses de domination ne sont vérifiées que sur tous les sous-segments de J .

La propriété précédente peut se généraliser au cas d'une application f de classe \mathcal{C}^k (l'hypothèse de domination doit porter alors sur les dérivées partielles successives de f par rapport à x .)

Exemple : la fonction "Gamma"

- La fonction "Gamma" d'Euler est définie sur \mathbb{R}^{+*} par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
- Cette application est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .
- Pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Compte tenu de $\Gamma(1) = 1$, on en tire : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$