IV Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition *(Continuité sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$ une application continue de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue intégrable sur $[a,b]$, telle que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a,b],\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (*hypothèse de domination*).
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Cette application est continue sur J.

Remarque

Le résultat précédent est encore valable même si l'hypothèse de domination est seulement vérifiée sur tout segment de J.

Proposition *(Dérivation sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$ une application continue de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, continues intégrables telles que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a,b],\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$.
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et : $\forall x \in J,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ (Leibniz).

Remarque

Ce résultat reste valable même si les hypothèses de domination ne sont vérifiées que sur tous les sous-segments de J.

La propriété précédente peut se généraliser au cas d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ (l'hypothèse de domination doit porter alors sur les dérivées partielles successives de f par rapport à x.)

Exemple : la fonction "Gamma"

- La fonction "Gamma" d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- Cette application est de classe est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Compte tenu de $\Gamma(1) = 1$, on en tire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021