Réduction des endomorphismes

Sommaire

I Valeurs et vecteurs propres

I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$.

La restriction de f à F est alors un endomorphisme de F, dit *induit* par f sur F.

Propriétés

– Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

– Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.

Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, notons $F_j = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

La matrice de f dans (e) est :

- Diagonale $\Leftrightarrow$ les droites vectorielles $\mathbb{K}e_j$ sont stables par f.
- Triangulaire supérieure $\Leftrightarrow$ les sous-espaces F_j sont stables par f.

I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe

Proposition

On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G étant distincts de $\{0\}$.

On note (e) une base de E obtenue en *juxtaposant* une base de F puis une base de G.

Soit M la matrice de f dans cette base.

A et C désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives $\dim F$ et $\dim G$.

– F est stable par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

– De même, F et G sont stables par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Généralisation

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, où $F_1, \ldots, F_p$ sont tous distincts de $\{0\}$.

On munit E d'une base (e) *adaptée* à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases $(e)_1$ de F_1, ..., $(e)_p$ de F_p.

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par $f \Leftrightarrow M$ est formée de p blocs diagonaux M_k ayant successivement les tailles $\dim F_l, \dim F_2, \ldots, \dim F_p$.

Dans ces conditions, si note on g_k la restriction de f à F_k, le k-ème bloc M_k de M est la matrice de g_k dans la base $(e)_k$ de F_k, et $\det f = \det M = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \det g_k = \prod_{k=1}^{n} \det M_k$.

I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Définition *(polynômes d'endomorphismes)*

Soit f un endomorphisme de E.

Soit $A = a_p\mathrm{X}^p + a_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(f) = a_pf^p + a_{p-1}f^{p-1} + \cdots + a_1f + a_0\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kf^k$

On dit que $A(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f.

Par exemple, si $A = \mathrm{X}^p$, alors $A(f) = f^p$. En particulier, si $A = 1$, $A(f) = \mathrm{Id}_E$.

Dans les énoncés ci-dessous, f désigne un endomorphisme quelconque de E.

De même A et B sont deux polynômes quelconques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriétés

- Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, alors il est stable par $A(f)$.
- $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$; $(AB)(f) = A(f) \circ B(f)$.
- L'application $A \mapsto A(f)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Si f et g commutent, alors $A(f)$ et $B(g)$ commutent. En particulier $A(f)$ et $B(f)$ commutent. Ker $A(f)$ et Im $A(f)$ sont donc stables par $B(f)$ (ou, plus simplement, par f).

Définition

Soit f un endomorphisme de E. Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $A(f) = 0$, on dit que A est un polynôme *annulateur* de f.

Définition *(polynômes de matrices)*

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kM^k$.

Remarque

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes d'endomorphismes.

En particulier : $\begin{cases} (\alpha A + \beta B)(M) = \alpha A(M) + \beta B(M). \\ (AB)(M) = A(M)B(M). \\ 1(M) = \mathrm{I}_n. \end{cases}$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto A(M)$ est donc un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base (e).

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors la matrice de $A(f)$ dans la base (e) est $A(M)$.

I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et λ un élément de $\mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe existe au moins un vecteur u **non nul** tel que $f(u) = \lambda u$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de f pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le *spectre* de f, et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarque et définition

Avec les notations précédentes, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ.

Remarques

- Les vecteurs propres de f, pour la valeur propre λ, sont les éléments non nuls de E_λ.
- Cas particulier : 0 est valeur propre de $f \Leftrightarrow f$ est non injective.

  Le sous-espace propre est alors $E_0 = \mathrm{Ker}\,(f)$.
- Soit u un vecteur non nul.

  Dire que u est vecteur propre de f, c'est dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}u$ est stable par f.
- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.
- Soit f un endomorphisme de E et u un élément de E.

  Si u est vecteur propre de f, c'est pour une seule valeur propre : l'unique λ tel que $f(u) = \lambda u$.

  Mais si λ est une valeur propre de f, il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : ce sont tous les vecteurs non nuls de E_λ.

Trois exemples

- L'endomorphisme f de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ défini par $f(P) = \mathrm{X}P$ n'a aucune valeur propre.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme $f : P \to \mathrm{X}P'$ de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont les entiers naturels.

  En effet si le terme de plus haut degré de P est $a_n \mathrm{X}^n$, celui de XP' est $n a_n \mathrm{X}^n$.

  L'égalité $f(P) = \lambda P$ n'est donc possible que si $\lambda \in \mathbb{N}$.

  Réciproquement, $P_n = \mathrm{X}^n$ est vecteur propre de f pour la valeur propre n.
- L'endomorphisme f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $f(u) = u'$ admet tout réel pour valeur propre.

  Pour tout réel λ, E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$.

I.5 Valeurs propres d'une matrice

Définition

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de K.

On dit que λ est une *valeur propre* de M s'il existe existe au moins un vecteur colonne U *non nul* tel que $MU = \lambda U$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de M pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans $\mathbb{K}$ est appelé le *spectre* de M dans $\mathbb{K}$, et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(M)$.

Remarques

– Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, ayant pour matrice M dans une base (e) de E.

  Les valeurs propres de M sont celles de f.

  Soient λ un scalaire, u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans (e).

  u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow U$ est vecteur propre de M pour λ.

  Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.

– Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élḿent de $\mathbb{K}$.

  λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

– Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut considérer que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

  Si on note $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice réelle, et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice complexe, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

  Cette inclusion peut être stricte.

  Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) = \{-i, i\}$

I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

Proposition

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_1, E_2, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe.

De manière équivalente : si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille de vecteurs propres de f pour p valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

Propriétés

- Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si les endomorphismes f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g.
- Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.

  Si u est vecteur propre de f pour λ, alors u est est vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$. On a un énoncé équivalent pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Cas particulier : Si P est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire si $P(f) = 0$, alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

  Notamment, si f est nilpotente, $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables

Définition *(automorphismes intérieurs)*

Soit a un automorphisme de E.
L'application $f \mapsto \varphi_a(f) = a \circ f \circ a^{-1}$ est un automorphisme de l' algèbre $\mathcal{L}(E)$.
Les applications φ_a sont appelées *automorphismes intérieurs* de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition

Avec les notations précédentes, $\mathrm{Sp}(\varphi_a(f)) = \mathrm{Sp}(f)$. Plus précisément :
u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow a(u)$ est vecteur propre de $\varphi_a(f)$ pour λ.
Les sous-espaces propres de $\varphi_a(f)$ sont donc les $a(E_\lambda)$, en notant E_λ les sous-espaces propres de l'application f.
Et puisque a est un automorphisme de E, $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$.

Définition *(matrices semblables)*

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$.

Propriétés

- M et N sont semblables $\Leftrightarrow$ elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de E (avec $\dim(E) = n$), chacune dans une certaine base de E.
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :

  Si E est muni d'une base (e), et si on note f, g, a les endomorphismes de E de matrices respectives N, M, P dans (e), alors $g = a \circ f \circ a^{-1}$, c'est-à-dire $g = \varphi_a(f)$.
- On en déduit en particulier que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$.

  Plus précisément, X est un vecteur colonne propre de $N \Leftrightarrow PX$ est un vecteur colonne propre de M (et pour la même valeur propre).

– Si M et N sont semblables, il en est de même également de ${}^{\mathrm{T}}M$ et de ${}^{\mathrm{T}}N$.

Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}M = Q\,{}^{\mathrm{T}}NQ^{-1}$ avec $Q = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.

– Si M et N sont semblables, et pout tout entier naturel k, M^k et N^k sont semblables.

Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow M^k = PN^kP^{-1}$.

Ce résultat s'étend aux entiers k négatifs si M et donc N sont inversibles.

II Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

II.1 Définition et premières propriétés

Définition

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le *polynôme caractéristique* de M est $\chi_M(\mathrm{X}) = \det(M - \mathrm{X}\mathrm{I}_n)$.

Propriétés

- Le polynôme caractéristique de M vérifie :
  $\chi_M(\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{X}^n + (-1)^{n-1} tr(M) \mathrm{X}^{n-l} + \cdots + \det(M)$.
- Les matrices M et ${}^t M$ ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition

Soit f un endomorphisme de E. On appelle polynôme caractéristique de f celui de la matrice M de f dans une base (e) quelconque de E. On le note $\chi_f(\mathrm{X})$.
D'après la propriété précédente, il ne dépend pas de la base choisie.

II.2 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition

Soient f un endomorphisme de E, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.
λ est valeur propre de $M \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_M(\mathrm{X})$.
λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_f(\mathrm{X})$.

Conséquence

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, admet au moins une valeur propre.

Définition *(multiplicité d'une valeur propre)*

Soient f un endomorphisme de E, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.
On dit que λ est une valeur propre de M (resp. de f), avec la *multiplicité* k $(1 \leq k \leq n)$, si λ est racine de $\chi_M(\mathrm{X})$ (resp. de $\chi_f(\mathrm{X})$), avec la multiplicité k.
Cette multiplicité est souvent notée $m(\lambda)$.
On parle ainsi de valeur propre simple, double, triple, ... si $m(\lambda) = 1, 2, 3, \ldots$.

Proposition *(somme et produit des valeurs propres)*

Si le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire se décompose en un produit de polynômes de degré 1, alors $\mathrm{tr}(M)$ (resp. $\det(M)$) est égale à la somme (resp. au produit) des valeurs propres de M chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

C'est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque

Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Proposition *(valeurs propres d'une matrice réelle)*

Soit M une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.

On considère ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

Si le nombre complexe λ est une valeur propre de M alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M, et avec la même multiplicité.

De plus, si le vecteur colonne X vérifie $MX = \lambda X$, alors on a l'égalité $M\bar{X} = \lambda\bar{X}$.

II.3 Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition

Soit f un endomorphisme de E.

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, les F_k étant non réduits à $\{0\}$.

On suppose que chaque F_k est stable par f, et on note g_k la restriction de f à F_k.

Alors $\chi_f(\mathrm{X}) = \chi_{g_1}(\mathrm{X})\chi_{g_2}(\mathrm{X})\cdots\chi_{g_p}(\mathrm{X})$.

Conséquence

Soit f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f.

Si on note $m(\lambda)$ sa multiplicité et $d(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre E_λ, alors on a la double inégalité : $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

En particulier, le sous-espace vectoriel propre associé à une valeur propre simple, c'est-à-dire de multiplicité 1, est nécessairement une droite vectorielle.

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

III.1 Définitions et premières propriétés

Proposition et définition

Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- E est la somme, nécessairement directe, des sous-espaces propres de f.
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Le polynôme caractéristique $\chi_f(\mathrm{X})$ est scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et pour toute valeur propre λ (toute racine de χ_f) la multiplicité $m(\lambda)$ est égale à la dimension $d(\lambda)$ du sous-espace propre E_λ.
- La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à $\dim(E)$.

Si ces conditions sont réunies, on dit que f est *diagonalisable.*

Définition *(matrices diagonalisables)*

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que M est *diagonalisable* si M est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$.

On dit alors que D est une *réduite diagonale de* M.

Remarque

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de M, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M.

Propriétés : Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n dont la matrice est M dans une base (e) de E est diagonalisable, et en particulier l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.
- Si M est diagonalisable et si N est semblable à M, alors N est diagonalisable.
- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  Si M est diagonalisable "dans $\mathbb{R}$" alors M est diagonalisable "dans $\mathbb{C}$", avec les mêmes valeurs et vecteurs propres et la même égalité $D = P^{-1}MP$, les matrices P et D étant à coefficients réels.
- En revanche, toujours avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ sans l'être dans $\mathbb{R}$, si des valeurs propres sont complexes mais non réelles.

  Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P et D sont alors à coefficients complexes.

III.2 Conditions de diagonalisabilité

Proposition *(une condition suffisante)*

Soit f un endomorphisme de E (on rappelle que $\dim E = n \geq 1$).

Si f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarques

La condition précédente n'est pas nécessaire.

Par exemple si f est une homothétie de rapport λ, alors f est diagonalisable et pourtant f n'a pour seule valeur propre que λ, avec la multiplicité n.

Inversement, si f n'a qu'une valeur propre λ, de multiplicité $n = \dim E$, f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est l' homothétie de rapport λ.

De même si M (élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si M est triangulaire avec des λ sur la diagonale), alors M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $M = \lambda \mathrm{I}_n$.

Proposition *(une condition nécessaire et suffisante)*

Soit f un endomorphisme de E. f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Exemple

Si l'application f vérifie $(f - 2Id) \circ (f + 3Id) = 0$, alors $E = E_2 \oplus E_{-3}$.

Si l'un des deux sous-espaces E_2 ou E_{-3} est réduit à $\{0\}$, c'est que f est une homothétie, de rapport -3 ou 2 respectivement.

Sinon le spectre de f est exactement égal à $\{-3, 2\}$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de E.

Si f est diagonalisable, alors la restriction de f à un sous-espace stable F est un endomorphisme diagonalisable de F.

IV Diagonalisation : pratique et applications

IV.1 Diagonalisation d'une matrice

Soit à diagonaliser une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

– On calcule le polynôme caractéristique $\chi_M(\mathrm{X})$ de la matrice M puis les racines dans $\mathbb{K}$ de ce polynôme.

– Si le polynôme χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

– Si au contraire χ_M est scindé alors pour chaque racine λ on résout le système homogène $(M - \lambda \mathrm{I_n})X = 0$, où X est une matrice colonne de $\mathbb{K}^n$.

  L'ensemble des solutions de ce système est le sous-espace propre E_λ.

  La résolution conduit à une base $(e)_\lambda$ de E_λ, donc à $\dim(E_\lambda)$.

– Si, pour l'un des λ, on a $\dim(E_\lambda) < m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_M, alors M n'est pas diagonalisable.

– Sinon M est diagonalisable, et la juxtaposition des bases $(e)_\lambda$ donne une base de $\mathbb{K}^n$, formée de vecteurs propres. On en déduit la matrice de passage P de la base canonique à la base (e), et l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M, dans l'ordre des vecteurs propres de la base (e).

Les calculs précédents peuvent s'effectuer avec la méthode du pivot :

– On part de la matrice $A_\lambda = M - \lambda \mathrm{I_n}$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire B_λ.

– Les valeurs propres de M sont les λ tels que B_λ est non inversible c'est-à-dire les valeurs qui annulent au moins un coefficient diagonal de B_λ.

– Pour chacune de ces valeurs, le sous espace propre est obtenu en résolvant le système $B_\lambda X = 0$, qui est équivalent au système $(M - \lambda \mathrm{I}_n)X = 0$.

IV.2 Applications de la diagonalisation

– *Calcul des puissances d'une matrice*

  Si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$est diagonalisable, l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale, permet d'écrire $M = PDP^{-1}$ puis pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

  On peut généraliser aux entiers relatifs k si M est inversible.

– *Systèmes de suites récurrences de pas* 1

  Soient $(u_p)_{p\geq 0}$, $(v_p)_{p\geq 0}$, $\ldots$, $(w_p)_{p\geq 0}$ des suites de $\mathbb{K}$.

  On pose $X_p = (u_p, v_p, \ldots, w_p)$.

  On suppose qu'il existe une matrice M telle que, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = MX_p$.

  Dans ces conditions, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = M^{p-N}X_p$, ce qui nécessite le calcul des puissances successives de M : on est donc ramené au cas précédent...

– *Etude d'une récurrence linéaire de pas n*

Soit une suite (u_p) définie par une relation de récurrence du type :

$\forall p \geq N, u_{p+n} = \alpha u_{p+n-1} + \beta u_{p+n-2} + \cdots + \gamma u_p$.

Posons $X_p = (u_{p+n}, u_{p+n-1}, \ldots, u_{p+1})$.

On a alors $X_{p+1} = MX_p$, où $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \ldots & \gamma \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = (-1)^n \left[\mathrm{X}^n - \alpha \mathrm{X}^{n-1} - \beta \mathrm{X}^{n-2} - \cdots - \gamma\right]$.

On est donc encore ramené au problème précédent.

V Trigonalisation

Définition

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

On dit que f est *trigonalisable* s'il existe une base (e) de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure.

Définition

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP$.

Remarque

Dire que M est trigonalisable, c'est dire que tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ayant pour matrice M dans une certaine base est lui-même trigonalisable.

Proposition *(CNS de trigonalisabilité)*

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n) est trigonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

En particulier toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, est trigonalisable.

Proposition *(une conséquence de la trigonalisabilité)*

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trigonalisable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.

Alors les valeurs propres de M^p, pour tout p de $\mathbb{N}$, sont $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_n^p$.

Cet énoncé se généralise aux entiers relatifs p si M est inversible.