Réduction des endomorphismes

Sommaire

I Valeurs et vecteurs propres 2
I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme 2
I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe 2
I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices 3
I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions 4
I.5 Valeurs propres d'une matrice 5
I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés 5
I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables 6
II Polynôme caractéristique 8
II.1 Définition et premières propriétés 8
II.2 Polynôme caractéristique et valeurs propres 8
II.3 Polynôme caractéristique et sous-espaces stables 9
III Endomorphismes et matrices diagonalisables 10
III.1 Définitions et premières propriétés 10
III.2 Conditions de diagonalisabilité 11
IV Diagonalisation : pratique et applications 12
IV.1 Diagonalisation d'une matrice 12
IV.2 Applications de la diagonalisation 12
V Trigonalisation 14

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I Valeurs et vecteurs propres

I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$.
La restriction de f à F est alors un endomorphisme de F, dit *induit* par f sur F.

Propriétés

– Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.
– Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.

Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, notons $F_j = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

La matrice de f dans (e) est :
- Diagonale $\Leftrightarrow$ les droites vectorielles $\mathbb{K}e_j$ sont stables par f.
- Triangulaire supérieure $\Leftrightarrow$ les sous-espaces F_j sont stables par f.

I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe

Proposition

On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G étant distincts de $\{0\}$.
On note (e) une base de E obtenue en *juxtaposant* une base de F puis une base de G.
Soit M la matrice de f dans cette base.
A et C désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives $\dim F$ et $\dim G$.
– F est stable par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
– De même, F et G sont stables par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Généralisation

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, où $F_1, \ldots, F_p$ sont tous distincts de $\{0\}$.

On munit E d'une base (e) *adaptée* à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases $(e)_1$ de F_1, …, $(e)_p$ de F_p.

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par $f \Leftrightarrow M$ est formée de p blocs diagonaux M_k ayant successivement les tailles $\dim F_l, \dim F_2, \ldots, \dim F_p$.

Dans ces conditions, si note on g_k la restriction de f à F_k, le k-ème bloc M_k de M est la matrice de g_k dans la base $(e)_k$ de F_k, et $\det f = \det M = \prod_{k=1}^{n} \det g_k = \prod_{k=1}^{n} \det M_k$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Définition *(polynômes d'endomorphismes)*

Soit f un endomorphisme de E.

Soit $A = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(f) = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$

On dit que $A(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f.

Par exemple, si $A = X^p$, alors $A(f) = f^p$. En particulier, si $A = 1$, $A(f) = \mathrm{Id}_E$.

Dans les énoncés ci-dessous, f désigne un endomorphisme quelconque de E.

De même A et B sont deux polynômes quelconques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriétés

- Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, alors il est stable par $A(f)$.
- $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$; $(AB)(f) = A(f) \circ B(f)$.
- L'application $A \mapsto A(f)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Si f et g commutent, alors $A(f)$ et $B(g)$ commutent. En particulier $A(f)$ et $B(f)$ commutent. $\operatorname{Ker} A(f)$ et $\operatorname{Im} A(f)$ sont donc stables par $B(f)$ (ou, plus simplement, par f).

Définition

Soit f un endomorphisme de E. Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $A(f) = 0$, on dit que A est un polynôme *annulateur* de f.

Définition *(polynômes de matrices)*

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$.

Remarque

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes d'endomorphismes.

En particulier : $\begin{cases} (\alpha A + \beta B)(M) = \alpha A(M) + \beta B(M). \\ (AB)(M) = A(M)B(M). \\ 1(M) = \mathrm{I}_n. \end{cases}$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto A(M)$ est donc un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base (e).

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors la matrice de $A(f)$ dans la base (e) est $A(M)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et λ un élément de $\mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe existe au moins un vecteur u **non nul** tel que $f(u) = \lambda u$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de f pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le *spectre* de f, et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarque et définition

Avec les notations précédentes, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $f - \lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ.

Remarques

- Les vecteurs propres de f, pour la valeur propre λ, sont les éléments non nuls de E_λ.
- Cas particulier : 0 est valeur propre de $f \Leftrightarrow f$ est non injective.

  Le sous-espace propre est alors $E_0 = \mathrm{Ker}\,(f)$.
- Soit u un vecteur non nul.

  Dire que u est vecteur propre de f, c'est dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}u$ est stable par f.
- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.
- Soit f un endomorphisme de E et u un élément de E.

  Si u est vecteur propre de f, c'est pour une seule valeur propre : l'unique λ tel que $f(u) = \lambda u$.

  Mais si λ est une valeur propre de f, il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : ce sont tous les vecteurs non nuls de E_λ.

Trois exemples

- L'endomorphisme f de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ défini par $f(P) = \mathrm{X}P$ n'a aucune valeur propre.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme $f : P \to \mathrm{X}P'$ de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont les entiers naturels.

  En effet si le terme de plus haut degré de P est $a_n\mathrm{X}^n$, celui de XP' est $na_n\mathrm{X}^n$.

  L'égalité $f(P) = \lambda P$ n'est donc possible que si $\lambda \in \mathbb{N}$.

  Réciproquement, $P_n = \mathrm{X}^n$ est vecteur propre de f pour la valeur propre n.
- L'endomorphisme f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $f(u) = u'$ admet tout réel pour valeur propre.

  Pour tout réel λ, E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.5 Valeurs propres d'une matrice

Définition

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de K.

On dit que λ est une *valeur propre* de M s'il existe existe au moins un vecteur colonne U *non nul* tel que $MU = \lambda U$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de M pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans $\mathbb{K}$ est appelé le *spectre* de M dans $\mathbb{K}$, et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(M)$.

Remarques

– Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, ayant pour matrice M dans une base (e) de E.

Les valeurs propres de M sont celles de f.

Soient λ un scalaire, u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans (e).

u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow U$ est vecteur propre de M pour λ.

Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.

– Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élment de $\mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

– Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut considérer que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si on note $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice réelle, et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice complexe, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

Cette inclusion peut être stricte.

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) = \{-i, i\}$

I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

Proposition

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_1, E_2, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe.

De manière équivalente : si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille de vecteurs propres de f pour p valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Propriétés

- Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si les endomorphismes f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g.
- Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.

  Si u est vecteur propre de f pour λ, alors u est est vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$. On a un énoncé équivalent pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Cas particulier : Si P est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire si $P(f) = 0$, alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

  Notamment, si f est nilpotente, $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables

Définition *(automorphismes intérieurs)*

Soit a un automorphisme de E.
L'application $f \mapsto \varphi_a(f) = a \circ f \circ a^{-1}$ est un automorphisme de l' algèbre $\mathcal{L}(E)$.
Les applications φ_a sont appelées *automorphismes intérieurs* de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition

Avec les notations précédentes, $\mathrm{Sp}(\varphi_a(f)) = \mathrm{Sp}(f)$. Plus précisément :
u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow a(u)$ est vecteur propre de $\varphi_a(f)$ pour λ.
Les sous-espaces propres de $\varphi_a(f)$ sont donc les $a(E_\lambda)$, en notant E_λ les sous-espaces propres de l'application f.
Et puisque a est un automorphisme de E, $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$.

Définition *(matrices semblables)*

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$.

Propriétés

- M et N sont semblables $\Leftrightarrow$ elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de E (avec $\dim(E) = n$), chacune dans une certaine base de E.
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :

  Si E est muni d'une base (e), et si on note f, g, a les endomorphismes de E de matrices respectives N, M, P dans (e), alors $g = a \circ f \circ a^{-1}$, c'est-à-dire $g = \varphi_a(f)$.
- On en déduit en particulier que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$.

  Plus précisément, X est un vecteur colonne propre de $N \Leftrightarrow PX$ est un vecteur colonne propre de M (et pour la même valeur propre).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– Si M et N sont semblables, il en est de même également de ${}^{\mathrm{T}}M$ et de ${}^{\mathrm{T}}N$.
Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}M = Q\,{}^{\mathrm{T}}NQ^{-1}$ avec $Q = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.
– Si M et N sont semblables, et pout tout entier naturel k, M^k et N^k sont semblables.
Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow M^k = PN^kP^{-1}$.
Ce résultat s'étend aux entiers k négatifs si M et donc N sont inversibles.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

II.1 Définition et premières propriétés

Définition

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le *polynôme caractéristique* de M est $\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$.

Propriétés

- Le polynôme caractéristique de M vérifie :
  $\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(M) X^{n-l} + \cdots + \det(M)$.
- Les matrices M et ${}^tM$ ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition

Soit f un endomorphisme de E. On appelle polynôme caractéristique de f celui de la matrice M de f dans une base (e) quelconque de E. On le note $\chi_f(X)$.
D'après la propriété précédente, il ne dépend pas de la base choisie.

II.2 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition

Soient f un endomorphisme de E, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.
λ est valeur propre de $M \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_M(X)$.
λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_f(X)$.

Conséquence

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, admet au moins une valeur propre.

Définition *(multiplicité d'une valeur propre)*

Soient f un endomorphisme de E, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.
On dit que λ est une valeur propre de M (resp. de f), avec la *multiplicité* k $(1 \leq k \leq n)$, si λ est racine de $\chi_M(X)$ (resp. de $\chi_f(X)$), avec la multiplicité k.
Cette multiplicité est souvent notée $m(\lambda)$.
On parle ainsi de valeur propre simple, double, triple, ... si $m(\lambda) = 1, 2, 3, \ldots$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(somme et produit des valeurs propres)*

Si le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire se décompose en un produit de polynômes de degré 1, alors $\mathrm{tr}(M)$ (resp. $\det(M)$) est égale à la somme (resp. au produit) des valeurs propres de M chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

C'est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque

Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Proposition *(valeurs propres d'une matrice réelle)*

Soit M une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.

On considère ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

Si le nombre complexe λ est une valeur propre de M alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M, et avec la même multiplicité.

De plus, si le vecteur colonne X vérifie $MX = \lambda X$, alors on a l'égalité $M\bar{X} = \lambda\bar{X}$.

II.3 Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition

Soit f un endomorphisme de E.

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, les F_k étant non réduits à $\{0\}$.

On suppose que chaque F_k est stable par f, et on note g_k la restriction de f à F_k.

Alors $\chi_f(\mathrm{X}) = \chi_{g_1}(\mathrm{X})\chi_{g_2}(\mathrm{X}) \cdots \chi_{g_p}(\mathrm{X})$.

Conséquence

Soit f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f.

Si on note $m(\lambda)$ sa multiplicité et $d(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre E_λ, alors on a la double inégalité : $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

En particulier, le sous-espace vectoriel propre associé à une valeur propre simple, c'est-à-dire de multiplicité 1, est nécessairement une droite vectorielle.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

III.1 Définitions et premières propriétés

Proposition et définition

Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- E est la somme, nécessairement directe, des sous-espaces propres de f.
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et pour toute valeur propre λ (toute racine de χ_f) la multiplicité $m(\lambda)$ est égale à la dimension $d(\lambda)$ du sous-espace propre E_λ.
- La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à $\dim(E)$.

Si ces conditions sont réunies, on dit que f est *diagonalisable*.

Définition *(matrices diagonalisables)*

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que M est *diagonalisable* si M est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$.

On dit alors que D est une *réduite diagonale de* M.

Remarque

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de M, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M.

Propriétés : Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n dont la matrice est M dans une base (e) de E est diagonalisable, et en particulier l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.
- Si M est diagonalisable et si N est semblable à M, alors N est diagonalisable.
- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  Si M est diagonalisable "dans $\mathbb{R}$" alors M est diagonalisable "dans $\mathbb{C}$", avec les mêmes valeurs et vecteurs propres et la même égalité $D = P^{-1}MP$, les matrices P et D étant à coefficients réels.
- En revanche, toujours avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ sans l'être dans $\mathbb{R}$, si des valeurs propres sont complexes mais non réelles.

  Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P et D sont alors à coefficients complexes.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.2 Conditions de diagonalisabilité

Proposition *(une condition suffisante)*

Soit f un endomorphisme de E (on rappelle que $\dim E = n \geq 1$).

Si f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarques

La condition précédente n'est pas nécessaire.

Par exemple si f est une homothétie de rapport λ, alors f est diagonalisable et pourtant f n'a pour seule valeur propre que λ, avec la multiplicité n.

Inversement, si f n'a qu'une valeur propre λ, de multiplicité $n = \dim E$, f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est l' homothétie de rapport λ.

De même si M (élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si M est triangulaire avec des λ sur la diagonale), alors M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $M = \lambda \mathrm{I}_n$.

Proposition *(une condition nécessaire et suffisante)*

Soit f un endomorphisme de E. f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Exemple

Si l'application f vérifie $(f - 2Id) \circ (f + 3Id) = 0$, alors $E = E_2 \oplus E_{-3}$.

Si l'un des deux sous-espaces E_2 ou E_{-3} est réduit à $\{0\}$, c'est que f est une homothétie, de rapport -3 ou 2 respectivement.

Sinon le spectre de f est exactement égal à $\{-3, 2\}$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de E.

Si f est diagonalisable, alors la restriction de f à un sous-espace stable F est un endomorphisme diagonalisable de F.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

IV Diagonalisation : pratique et applications

IV.1 Diagonalisation d'une matrice

Soit à diagonaliser une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On calcule le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M puis les racines dans $\mathbb{K}$ de ce polynôme.
- Si le polynôme χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}$.
- Si au contraire χ_M est scindé alors pour chaque racine λ on résout le système homogène $(M - \lambda I_n)X = 0$, où X est une matrice colonne de $\mathbb{K}^n$.

  L'ensemble des solutions de ce système est le sous-espace propre E_λ.

  La résolution conduit à une base $(e)_\lambda$ de E_λ, donc à $\dim(E_\lambda)$.
- Si, pour l'un des λ, on a $\dim(E_\lambda) < m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_M, alors M n'est pas diagonalisable.
- Sinon M est diagonalisable, et la juxtaposition des bases $(e)_\lambda$ donne une base de $\mathbb{K}^n$, formée de vecteurs propres. On en déduit la matrice de passage P de la base canonique à la base (e), et l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M, dans l'ordre des vecteurs propres de la base (e).

Les calculs précédents peuvent s'effectuer avec la méthode du pivot :

- On part de la matrice $A_\lambda = M - \lambda I_n$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire B_λ.
- Les valeurs propres de M sont les λ tels que B_λ est non inversible c'est-à-dire les valeurs qui annulent au moins un coefficient diagonal de B_λ.
- Pour chacune de ces valeurs, le sous espace propre est obtenu en résolvant le système $B_\lambda X = 0$, qui est équivalent au système $(M - \lambda I_n)X = 0$.

IV.2 Applications de la diagonalisation

- *Calcul des puissances d'une matrice*

  Si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$est diagonalisable, l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale, permet d'écrire $M = PDP^{-1}$ puis pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

  On peut généraliser aux entiers relatifs k si M est inversible.
- *Systèmes de suites récurrences de pas* 1

  Soient $(u_p)_{p\geq 0}$, $(v_p)_{p\geq 0}$, ..., $(w_p)_{p\geq 0}$ des suites de $\mathbb{K}$.

  On pose $X_p = (u_p, v_p, \ldots, w_p)$.

  On suppose qu'il existe une matrice M telle que, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = MX_p$.

  Dans ces conditions, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = M^{p-N}X_p$, ce qui nécessite le calcul des puissances successives de M : on est donc ramené au cas précédent...

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– *Etude d'une récurrence linéaire de pas n*

Soit une suite (u_p) définie par une relation de récurrence du type :

$\forall p \geq N, u_{p+n} = \alpha u_{p+n-1} + \beta u_{p+n-2} + \cdots + \gamma u_p$.

Posons $X_p = (u_{p+n}, u_{p+n-1}, \ldots, u_{p+1})$.

On a alors $X_{p+1} = MX_p$, où $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \ldots & \gamma \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = (-1)^n \left[\mathrm{X}^n - \alpha \mathrm{X}^{n-1} - \beta \mathrm{X}^{n-2} - \cdots - \gamma\right]$.

On est donc encore ramené au problème précédent.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

V Trigonalisation

Définition

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

On dit que f est *trigonalisable* s'il existe une base (e) de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure.

Définition

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP$.

Remarque

Dire que M est trigonalisable, c'est dire que tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ayant pour matrice M dans une certaine base est lui-même trigonalisable.

Proposition *(CNS de trigonalisabilité)*

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n) est trigonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

En particulier toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, est trigonalisable.

Proposition *(une conséquence de la trigonalisabilité)*

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trigonalisable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.

Alors les valeurs propres de M^p, pour tout p de $\mathbb{N}$, sont $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_n^p$.

Cet énoncé se généralise aux entiers relatifs p si M est inversible.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021