

I Valeurs et vecteurs propres

I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Définition

- Soient f un endomorphisme de E , et F un sous-espace vectoriel de E .
 On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$.
 La restriction de f à F est alors un endomorphisme de F , dit *induit* par f sur F .

Propriétés

- Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .
- Soit $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ une base de E .

Pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, notons $F_j = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$.

La matrice de f dans (e) est :

- Diagonale \Leftrightarrow les droites vectorielles $\mathbb{K}e_j$ sont stables par f .
- Triangulaire supérieure \Leftrightarrow les sous-espaces F_j sont stables par f .

I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe

Proposition

- On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G étant distincts de $\{0\}$.
 On note (e) une base de E obtenue en *juxtaposant* une base de F puis une base de G .
 Soit M la matrice de f dans cette base.
 A et C désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives $\dim F$ et $\dim G$.
- F est stable par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
 - De même, F et G sont stables par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Généralisation

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, où F_1, \dots, F_p sont tous distincts de $\{0\}$.

On munit E d'une base (e) *adaptée* à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases $(e)_1$ de $F_1, \dots, (e)_p$ de F_p .

Soit f un endomorphisme de E , de matrice M dans la base (e) .

Les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par $f \Leftrightarrow M$ est formée de p blocs diagonaux M_k ayant successivement les tailles $\dim F_1, \dim F_2, \dots, \dim F_p$.

Dans ces conditions, si note on g_k la restriction de f à F_k , le k -ème bloc M_k de M est la matrice de g_k dans la base $(e)_k$ de F_k , et $\det f = \det M = \prod_{k=1}^n \det g_k = \prod_{k=1}^n \det M_k$.

I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Définition (*polynômes d'endomorphismes*)

Soit f un endomorphisme de E .

Soit $A = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} .

On note $A(f) = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E = \sum_{k=0}^p a_k f^k$

On dit que $A(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f .

Par exemple, si $A = X^p$, alors $A(f) = f^p$. En particulier, si $A = 1$, $A(f) = \text{Id}_E$.

Dans les énoncés ci-dessous, f désigne un endomorphisme quelconque de E .

De même A et B sont deux polynômes quelconques à coefficients dans \mathbb{K} .

Propriétés

- Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f , alors il est stable par $A(f)$.
- $\forall \alpha, \beta \in K, (\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$; $(AB)(f) = A(f) \circ B(f)$.
- L'application $A \mapsto A(f)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Si f et g commutent, alors $A(f)$ et $B(g)$ commutent. En particulier $A(f)$ et $B(f)$ commutent.
 $\text{Ker } A(f)$ et $\text{Im } A(f)$ sont donc stables par $B(f)$ (ou, plus simplement, par f).

Définition

Soit f un endomorphisme de E . Soit A un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} .

Si $A(f) = 0$, on dit que A est un polynôme *annulateur* de f .

Définition (*polynômes de matrices*)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} .

On note $A(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k$.

Remarque

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes d'endomorphismes.

$$\text{En particulier : } \begin{cases} (\alpha A + \beta B)(M) = \alpha A(M) + \beta B(M). \\ (AB)(M) = A(M)B(M). \\ 1(M) = I_n. \end{cases}$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto A(M)$ est donc un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base (e) .

Soit f un endomorphisme de E , de matrice M dans la base (e) .

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors la matrice de $A(f)$ dans la base (e) est $A(M)$.

I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions

Définition

Soient f un endomorphisme de E , et λ un élément de \mathbb{K} . On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe au moins un vecteur u **non nul** tel que $f(u) = \lambda u$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de f pour la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le *spectre* de f , et noté $\text{Sp}(f)$.

Remarque et définition

Avec les notations précédentes, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ .

Remarques

- Les vecteurs propres de f , pour la valeur propre λ , sont les éléments non nuls de E_λ .
- Cas particulier : 0 est valeur propre de $f \Leftrightarrow f$ est non injective.

Le sous-espace propre est alors $E_0 = \text{Ker}(f)$.

- Soit u un vecteur non nul.

Dire que u est vecteur propre de f , c'est dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}u$ est stable par f .

- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.
- Soit f un endomorphisme de E et u un élément de E .

Si u est vecteur propre de f , c'est pour une seule valeur propre : l'unique λ tel que $f(u) = \lambda u$.

Mais si λ est une valeur propre de f , il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : ce sont tous les vecteurs non nuls de E_λ .

Trois exemples

- L'endomorphisme f de $\mathbb{K}[X]$ défini par $f(P) = XP$ n'a aucune valeur propre.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme $f : P \mapsto XP'$ de $\mathbb{K}[X]$ sont les entiers naturels.

En effet si le terme de plus haut degré de P est $a_n X^n$, celui de XP' est $na_n X^n$.

L'égalité $f(P) = \lambda P$ n'est donc possible que si $\lambda \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, $P_n = X^n$ est vecteur propre de f pour la valeur propre n .

- L'endomorphisme f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $f(u) = u'$ admet tout réel pour valeur propre. Pour tout réel λ , E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$.

I.5 Valeurs propres d'une matrice

Définition

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de K .

On dit que λ est une *valeur propre* de M s'il existe au moins un vecteur colonne U non nul tel que $MU = \lambda U$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de M pour la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans \mathbb{K} est appelé le *spectre* de M dans \mathbb{K} , et est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$.

Remarques

- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , ayant pour matrice M dans une base (e) de E .

Les valeurs propres de M sont celles de f .

Soient λ un scalaire, u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans (e) .

u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow U$ est vecteur propre de M pour λ .

Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de \mathbb{K}^n de matrice M dans la base canonique.

- Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de \mathbb{K} .

λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda I_n$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda I_n) = 0$.

- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut considérer que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si on note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice réelle, et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice complexe, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

Cette inclusion peut être stricte.

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, i\}$

I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

Proposition

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f .

Notons E_1, E_2, \dots, E_p les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \dots + E_p$ est directe.

De manière équivalente : si u_1, u_2, \dots, u_p est une famille de vecteurs propres de f pour p valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

Propriétés

- Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} . Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si les endomorphismes f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g .
- Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.

Si u est vecteur propre de f pour λ , alors u est vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$. On a un énoncé équivalent pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cas particulier : Si P est un polynôme annulateur de f , c'est-à-dire si $P(f) = 0$, alors les valeurs propres de f sont des racines de P .

Notamment, si f est nilpotente, $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables

Définition (automorphismes intérieurs)

Soit a un automorphisme de E .

L'application $f \mapsto \varphi_a(f) = a \circ f \circ a^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Les applications φ_a sont appelées *automorphismes intérieurs* de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition

Avec les notations précédentes, $\text{Sp}(\varphi_a(f)) = \text{Sp}(f)$. Plus précisément :

u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow a(u)$ est vecteur propre de $\varphi_a(f)$ pour λ .

Les sous-espaces propres de $\varphi_a(f)$ sont donc les $a(E_\lambda)$, en notant E_λ les sous-espaces propres de l'application f .

Et puisque a est un automorphisme de E , $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$.

Définition (matrices semblables)

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$.

Propriétés

- M et N sont semblables \Leftrightarrow elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de E (avec $\dim(E) = n$), chacune dans une certaine base de E .
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :

Si E est muni d'une base (e) , et si on note f, g, a les endomorphismes de E de matrices respectives N, M, P dans (e) , alors $g = a \circ f \circ a^{-1}$, c'est-à-dire $g = \varphi_a(f)$.

- On en déduit en particulier que $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$.

Plus précisément, X est un vecteur colonne propre de $N \Leftrightarrow PX$ est un vecteur colonne propre de M (et pour la même valeur propre).



- Si M et N sont semblables, il en est de même également de ${}^T M$ et de ${}^T N$.
Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow {}^T M = Q {}^T N Q^{-1}$ avec $Q = {}^T P^{-1}$.
 - Si M et N sont semblables, et pour tout entier naturel k , M^k et N^k sont semblables.
Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow M^k = PN^k P^{-1}$.
- Ce résultat s'étend aux entiers k négatifs si M et donc N sont inversibles.