II Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

II.1 Définition et premières propriétés

Définition

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le *polynôme caractéristique* de M est $\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$.

Propriétés

- Le polynôme caractéristique de M vérifie :
  $\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(M) X^{n-l} + \cdots + \det(M)$.
- Les matrices M et ${}^tM$ ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition

Soit f un endomorphisme de E. On appelle polynôme caractéristique de f celui de la matrice M de f dans une base (e) quelconque de E. On le note $\chi_f(X)$.
D'après la propriété précédente, il ne dépend pas de la base choisie.

II.2 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition

Soient f un endomorphisme de E, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.
λ est valeur propre de $M \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_M(X)$.
λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_f(X)$.

Conséquence

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, admet au moins une valeur propre.

Définition *(multiplicité d'une valeur propre)*

Soient f un endomorphisme de E, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.
On dit que λ est une valeur propre de M (resp. de f), avec la *multiplicité* k $(1 \leq k \leq n)$, si λ est racine de $\chi_M(X)$ (resp. de $\chi_f(X)$), avec la multiplicité k.
Cette multiplicité est souvent notée $m(\lambda)$.
On parle ainsi de valeur propre simple, double, triple, ... si $m(\lambda) = 1, 2, 3, \ldots$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(somme et produit des valeurs propres)*

Si le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire se décompose en un produit de polynômes de degré 1, alors $\mathrm{tr}(M)$ (resp. $\det(M)$) est égale à la somme (resp. au produit) des valeurs propres de M chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

C'est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque

Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Proposition *(valeurs propres d'une matrice réelle)*

Soit M une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.

On considère ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

Si le nombre complexe λ est une valeur propre de M alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M, et avec la même multiplicité.

De plus, si le vecteur colonne X vérifie $MX = \lambda X$, alors on a l'égalité $M\bar{X} = \lambda\bar{X}$.

II.3 Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition

Soit f un endomorphisme de E.

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, les F_k étant non réduits à $\{0\}$.

On suppose que chaque F_k est stable par f, et on note g_k la restriction de f à F_k.

Alors $\chi_f(\mathrm{X}) = \chi_{g_1}(\mathrm{X})\chi_{g_2}(\mathrm{X})\cdots\chi_{g_p}(\mathrm{X})$.

Conséquence

Soit f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f.

Si on note $m(\lambda)$ sa multiplicité et $d(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre E_λ, alors on a la double inégalité : $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

En particulier, le sous-espace vectoriel propre associé à une valeur propre simple, c'est-à-dire de multiplicité 1, est nécessairement une droite vectorielle.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021