

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

III.1 Définitions et premières propriétés

Proposition et définition

Soit f un endomorphisme de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- E est la somme, nécessairement directe, des sous-espaces propres de f .
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et pour toute valeur propre λ (toute racine de χ_f) la multiplicité $m(\lambda)$ est égale à la dimension $d(\lambda)$ du sous-espace propre E_λ .
- La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à $\dim(E)$.

Si ces conditions sont réunies, on dit que f est *diagonalisable*.

Définition (matrices diagonalisables)

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que M est *diagonalisable* si M est semblable à une matrice diagonale D , c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$.

On dit alors que D est une *réduite diagonale* de M .

Remarque

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de M , chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{K}^n à une base de vecteurs propres de M .

Propriétés : Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- M est diagonalisable \Leftrightarrow tout endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n dont la matrice est M dans une base (e) de E est diagonalisable, et en particulier l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice M dans la base canonique.
- Si M est diagonalisable et si N est semblable à M , alors N est diagonalisable.
- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si M est diagonalisable "dans \mathbb{R} " alors M est diagonalisable "dans \mathbb{C} ", avec les mêmes valeurs et vecteurs propres et la même égalité $D = P^{-1}MP$, les matrices P et D étant à coefficients réels.

- En revanche, toujours avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M peut être diagonalisable dans \mathbb{C} sans l'être dans \mathbb{R} , si des valeurs propres sont complexes mais non réelles.

Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P et D sont alors à coefficients complexes.

III.2 Conditions de diagonalisabilité

Proposition (*une condition suffisante*)

Soit f un endomorphisme de E (on rappelle que $\dim E = n \geq 1$).
Si f admet n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} , alors f est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarques

La condition précédente n'est pas nécessaire.

Par exemple si f est une homothétie de rapport λ , alors f est diagonalisable et pourtant f n'a pour seule valeur propre que λ , avec la multiplicité n .

Inversement, si f n'a qu'une valeur propre λ , de multiplicité $n = \dim E$, f est diagonalisable $\Leftrightarrow f$ est l'homothétie de rapport λ .

De même si M (élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si M est triangulaire avec des λ sur la diagonale), alors M est diagonalisable $\Leftrightarrow M = \lambda I_n$.

Proposition (*une condition nécessaire et suffisante*)

Soit f un endomorphisme de E . f est diagonalisable $\Leftrightarrow f$ est annihilée par un polynôme scindé à racines simples.

Exemple

Si l'application f vérifie $(f - 2Id) \circ (f + 3Id) = 0$, alors $E = E_2 \oplus E_{-3}$.

Si l'un des deux sous-espaces E_2 ou E_{-3} est réduit à $\{0\}$, c'est que f est une homothétie, de rapport -3 ou 2 respectivement.

Sinon le spectre de f est exactement égal à $\{-3, 2\}$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de E .
Si f est diagonalisable, alors la restriction de f à un sous-espace stable F est un endomorphisme diagonalisable de F .