III Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

III.1 Définitions et premières propriétés

Proposition et définition

Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- E est la somme, nécessairement directe, des sous-espaces propres de f.
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et pour toute valeur propre λ (toute racine de χ_f) la multiplicité $m(\lambda)$ est égale à la dimension $d(\lambda)$ du sous-espace propre E_λ.
- La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à $\dim(E)$.

Si ces conditions sont réunies, on dit que f est *diagonalisable*.

Définition *(matrices diagonalisables)*

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que M est *diagonalisable* si M est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$.

On dit alors que D est une *réduite diagonale de* M.

Remarque

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de M, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M.

Propriétés : Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n dont la matrice est M dans une base (e) de E est diagonalisable, et en particulier l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.
- Si M est diagonalisable et si N est semblable à M, alors N est diagonalisable.
- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  Si M est diagonalisable "dans $\mathbb{R}$" alors M est diagonalisable "dans $\mathbb{C}$", avec les mêmes valeurs et vecteurs propres et la même égalité $D = P^{-1}MP$, les matrices P et D étant à coefficients réels.
- En revanche, toujours avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ sans l'être dans $\mathbb{R}$, si des valeurs propres sont complexes mais non réelles.

  Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P et D sont alors à coefficients complexes.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.2 Conditions de diagonalisabilité

Proposition *(une condition suffisante)*

Soit f un endomorphisme de E (on rappelle que $\dim E = n \geq 1$).

Si f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarques

La condition précédente n'est pas nécessaire.

Par exemple si f est une homothétie de rapport λ, alors f est diagonalisable et pourtant f n'a pour seule valeur propre que λ, avec la multiplicité n.

Inversement, si f n'a qu'une valeur propre λ, de multiplicité $n = \dim E$, f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est l' homothétie de rapport λ.

De même si M (élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si M est triangulaire avec des λ sur la diagonale), alors M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $M = \lambda \mathrm{I}_n$.

Proposition *(une condition nécessaire et suffisante)*

Soit f un endomorphisme de E. f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Exemple

Si l'application f vérifie $(f - 2Id) \circ (f + 3Id) = 0$, alors $E = E_2 \oplus E_{-3}$.

Si l'un des deux sous-espaces E_2 ou E_{-3} est réduit à $\{0\}$, c'est que f est une homothétie, de rapport -3 ou 2 respectivement.

Sinon le spectre de f est exactement égal à $\{-3, 2\}$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de E.

Si f est diagonalisable, alors la restriction de f à un sous-espace stable F est un endomorphisme diagonalisable de F.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021