IV Diagonalisation : pratique et applications

IV.1 Diagonalisation d'une matrice

Soit à diagonaliser une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On calcule le polynôme caractéristique $\chi_M(\mathrm{X})$ de la matrice M puis les racines dans $\mathbb{K}$ de ce polynôme.
- Si le polynôme χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}$.
- Si au contraire χ_M est scindé alors pour chaque racine λ on résout le système homogène $(M - \lambda \mathrm{I_n})X = 0$, où X est une matrice colonne de $\mathbb{K}^n$.

  L'ensemble des solutions de ce système est le sous-espace propre E_λ.

  La résolution conduit à une base $(e)_\lambda$ de E_λ, donc à $\dim(E_\lambda)$.
- Si, pour l'un des λ, on a $\dim(E_\lambda) < m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_M, alors M n'est pas diagonalisable.
- Sinon M est diagonalisable, et la juxtaposition des bases $(e)_\lambda$ donne une base de $\mathbb{K}^n$, formée de vecteurs propres. On en déduit la matrice de passage P de la base canonique à la base (e), et l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M, dans l'ordre des vecteurs propres de la base (e).

Les calculs précédents peuvent s'effectuer avec la méthode du pivot :

- On part de la matrice $A_\lambda = M - \lambda \mathrm{I_n}$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire B_λ.
- Les valeurs propres de M sont les λ tels que B_λ est non inversible c'est-à-dire les valeurs qui annulent au moins un coefficient diagonal de B_λ.
- Pour chacune de ces valeurs, le sous espace propre est obtenu en résolvant le système $B_\lambda X = 0$, qui est équivalent au système $(M - \lambda \mathrm{I}_n)X = 0$.

IV.2 Applications de la diagonalisation

- *Calcul des puissances d'une matrice*

  Si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$est diagonalisable, l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale, permet d'écrire $M = PDP^{-1}$ puis pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

  On peut généraliser aux entiers relatifs k si M est inversible.
- *Systèmes de suites récurrences de pas* 1

  Soient $(u_p)_{p\geq 0}$, $(v_p)_{p\geq 0}$, $\ldots$, $(w_p)_{p\geq 0}$ des suites de $\mathbb{K}$.

  On pose $X_p = (u_p, v_p, \ldots, w_p)$.

  On suppose qu'il existe une matrice M telle que, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = MX_p$.

  Dans ces conditions, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = M^{p-N}X_p$, ce qui nécessite le calcul des puissances successives de M : on est donc ramené au cas précédent...

– *Etude d'une récurrence linéaire de pas n*

Soit une suite (u_p) définie par une relation de récurrence du type :

$\forall p \geq N, u_{p+n} = \alpha u_{p+n-1} + \beta u_{p+n-2} + \cdots + \gamma u_p$.
Posons $X_p = (u_{p+n}, u_{p+n-1}, \ldots, u_{p+1})$.

On a alors $X_{p+1} = MX_p$, où $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \ldots & \gamma \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = (-1)^n \left[\mathrm{X}^n - \alpha\mathrm{X}^{n-1} - \beta\mathrm{X}^{n-2} - \cdots - \gamma\right]$.

On est donc encore ramené au problème précédent.