I Généralités sur les séries entières

I.1 Rayon de convergence

Définition *(Séries entières réelles ou complexes)*

- On appelle *série entière complexe* toute série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f_n(z) = a_n\, z^n$, où (a_n) est une suite de $\mathbb{K}$.
- On appelle *série entière réelle* toute série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ par $f_n(t) = a_n\, t^n$, où (a_n) est une suite de $\mathbb{K}$.

Remarque

Dans toute la suite, on considère surtout des séries entières complexes.

Les propriétés des séries entières réelles s'en déduisent, à quelques changements de vocabulaire près, comme remplacer *disque* de convergence par *intervalle* de convergence.

Définition *(Rayon de convergence)*

Soit (a_n) une suite de $\mathbb{K}$. L'ensemble des réels r positifs ou nuls pour lesquels la suite $(a_n r^n)$ est bornée est non vide car il contient 0.

Sa borne supérieure R, éventuellement infinie, est appelée *rayon de convergence* de la série entière complexe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$, ou de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, t^n$.

Premiers exemples

- Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} n!\, z^n$ est $R = 0$.
- Celui de $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ est $R = 1$. Celui de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

Remarques

- On ne change pas le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ en modifiant la valeur d'un nombre fini de coefficients a_n.
- Par définition $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n\, z^n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|\, z^n$, ont le même rayon de convergence.
- Soient R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et de $\sum\limits_{n\geq 0} b_n\, z^n$.

  On suppose que $|a_n| \leq |b_n|$, au moins à partir d'un certain rang. Alors $R' \leq R$.
- Pour tout $\lambda \neq 0$, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et de $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda a_n\, z^n$ ont même rayon de convergence.

  S'il existe $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, tels que, pour n assez grand $\lambda\, |a_n| \leq |b_n| \leq \mu\, |a_n|$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n\, z^n$ ont le même rayon de convergence. C'est le cas si $|a_n| \sim |b_n|$.

I.2 Disque ouvert de convergence

Proposition *(convergence d'une série entière)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence.

- Si $|z_0| < R$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z_0^n$ est absolument convergente, donc convergente.

  Cela implique que la suite $(a_n\, z_0^n)$ est convergente vers 0 et donc qu'elle est bornée.
- Si $|z_0| > R$, alors la suite $(a_n\, z_0^n)$ n'est pas bornée, et donc n'est pas convergente.

  La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z_0^n$ est donc grossièrement divergente.

Définition *(disque ouvert de convergence)*

Avec les notations de la définition précédente, et en supposant $R \neq 0$:
- $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est appelé *disque ouvert de convergence* de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$.
- $]-R, R[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence* de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, t^n$.

Remarques

- Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est absolument convergente, donc convergente, sur son disque ou intervalle ouvert de convergence. On peut donc parler de la somme $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ (resp. $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$) sur ce disque (resp. sur cet intervalle) ouvert.
- Une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R = 0$ ne converge qu'en $z = 0$.

  Cette situation ne présente pas beaucoup d'intérêt.

Proposition *(règle de d'Alembert)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence.

On suppose que les coefficients a_n sont non nuls, au moins à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

(avec $R = +\infty$ si $\lambda = 0$ et $R = 0$ si $\lambda = +\infty$).

Remarques

- Si a_n est une fraction rationnelle de n, alors le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ vaut 1.
- Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ existe toujours.

  En revanche $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ peut ne pas exister. Il faudra alors utiliser d'autres méthodes que la règle de d'Alembert et par exemple revenir tout simplement à la définition.

– Un cas fréquent est celui des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ *lacunaires*, ainsi nommées parce que l'ensemble des indices n tels que $a_n = 0$ est infini.
Exemples : $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n\, z^{2n}$, $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n\, z^{2n+1}$, ou $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n\, z^{n!}\ldots$
On pourra alors utiliser la forme initiale du critère de d'Alembert :
◇ On considère le terme général u_n de la série, par exemple $u_n = \alpha_n\, z^{n!}$.
◇ On compare la limite éventuelle du rapport $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ avec 1.
◇ On sait alors pour quelles valeurs de $|z|$ la série est convergente.

Proposition *(Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Cette série est normalement convergente sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence.

Conséquence : la somme $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Remarque

Il se peut qu'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ ne soit pas uniformément convergente (et à fortiori pas normalement convergente) sur son disque ouvert de convergence.
C'est le cas par exemple pour la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$.

Remarques : *(Comportement sur le bord du disque ouvert de convergence)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

– Le comportement de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ sur le cercle de centre 0 et de rayon R peut être quelconque (convergence en tous les points du cercle, ou en certains points, ou en aucun point.)
– Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|\, R^n$ est convergente, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R.
La somme $S(z)$ de cette série est alors continue sur ce disque fermé.

I.3 Opérations sur les séries entières

Proposition *(Somme de deux séries entières*

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n\, z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

Soit ρ le rayon de convergence de la série entière somme $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, z^n$.

Alors $\rho \geq \min(R, R')$, avec égalité si $R \neq R'$.

Pour $|z| < \min(R, R')$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$.

Proposition *(Produit de Cauchy de deux séries entières)*

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

Soit r le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} c_n\, z^n$ où, pour tout entier n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

(on dit que la série $\sum_{n\geq 0} c_n\, z^n$ est le *produit de Cauchy* des séries $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$).

Alors $r \geq \min(R, R')$. Pour $|z| < \min(R, R')$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$.

Proposition *(Unicité des coefficients d'une série entière)*

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$, deux séries entières de rayons $R > 0$ et $R' > 0$.

On suppose que les sommes de ces deux séries coïncident sur un voisinage de 0.

Alors ces deux séries sont identiques : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Conséquence

La somme $S(z)$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est une fonction paire (resp. impaire) $\Leftrightarrow$ les a_n de rang impair (resp. pair) sont nuls.

I.4 Dérivation et intégration d'une série entière

Définition *(Série entière dérivée)*

La série entière $\sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1}\, z^n$ est appelée *série dérivée* de $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$.

Remarque

A un changement d'indice près, la série dérivée peut s'écrire : $\sum_{n\geq 1} na_n\, z^{n-1}$.

Proposition

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Généralisation

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- La série entière $\sum_{n\geq 0} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}\, z^n$ est appelée série dérivée p-ième de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$. Son rayon de convergence est R.

  Cette série peut aussi s'écrire : $\sum_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n\, z^{n-p}$.
- La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n\, z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} a_{n-1}\, z^n$ obtenue par "intégration terme à terme" de $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ a le même rayon de convergence R.

Remarques

Une série entière et ses séries dérivées, tout en ayant le même rayon de convergence, peuvent avoir des comportements différents sur le bord du disque ouvert de convergence.

Proposition *(Dérivabilité de la somme d'une série entière réelle)*

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R>0$, de somme $S(t)$.

Alors S est dérivable sur $]-R,R[$, et sur tout cet intervalle :

$S'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,t^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\,t^{n-1}$.

Généralisation

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R>0$, de somme $S(t)$.

L'application S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et sur tout cet intervalle :

$$\begin{aligned}\forall p\geq 0,\, S^{(p)}(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)\,a_{n+p}\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(n+p)!}{n!}\,a_{n+p}\,t^n\\&=\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-p+1)\,a_n\,t^{n-p}=\sum_{n=p}^{\infty}\tfrac{n!}{(n-p)!}\,a_n\,t^{n-p}.\end{aligned}$$

Remarque

Lesénoncés précédents signifient qu'on peut dériver autant de fois que nécessaire, et terme à terme, la somme d'une série entière, sur tout son intervalle ouvert de convergence, sans avoir à invoquer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

Conséquence

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R>0$, de somme $S(t)$.

Pour tout entier n, le coefficient a_n est égal à $\dfrac{1}{n!}\,S^{(n)}(0)$.

Proposition *(Intégrabilité de la somme d'une série entière réelle)*

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R>0$, de somme $S(t)$.

Une primitive de la fonction S, sur l'intervalle $]-R,R[$, est la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\,a_n\,t^{n+1}$ obtenue par intégration terme à terme.

Sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans $]-R,R[$, on peut donc écrire :

$$\int_\alpha^\beta\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\alpha^\beta a_n\,t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n+1}\,a_n\,(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}).$$