

II Développements en série entière

II.1 Fonctions développables en série entière

Définition

Soit f une application définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

On dit que f est *développable en série entière* en un point x_0 de Ω s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et un réel $\rho > 0$ tels que : $|x - x_0| < \rho \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Remarques

- On abrège souvent "développable en série entière" en *DSE*.
- La définition sous-entend que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est au moins égal à ρ .
On peut avoir $R > \rho$. D'ailleurs, si ρ convient, tout réel $\rho' < \rho$ convient encore.
- *Importance des DSE en 0* :
Le changement $x = x_0 + h$ ramène le problème en 0. C'est ce qu'on supposera dans la suite.

Trois exemples

- L'application $x \mapsto \exp x$ est *DSE* en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Plus généralement :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp(x_0) \exp(x - x_0) = \exp(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

On voit donc que $x \mapsto \exp(x)$ est *DSE* en tout point de \mathbb{R} .

- L'application $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1-x}$ est *DSE* en 0 : $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Plus généralement, soit x_0 un élément de $] - 1, 1[$.

Alors, en posant $a_n = \frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0} \frac{1}{1 - \frac{x-x_0}{1-x_0}} = \frac{1}{1-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{1-x_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Le rayon de convergence du développement précédent est $|1-x_0|$.

On voit donc que f est *DSE* en tout point de $] - 1, 1[$.

- Pour tout x de $] - 1, 1[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

On voit donc que f est *DSE* en 0, avec un rayon de convergence égal à 1.

On voit aussi que le domaine de définition de f déborde de $] - 1, 1[$.

En dehors de cet intervalle $f(x)$ existe toujours mais ne peut plus être représenté par cette série entière.

Remarque (*Fonctions DSE sur un intervalle*)

Si f est DSE en 0, et si le rayon de convergence de ce développement est r , on montre que f est DSE en tout point de $] -r, r[$ (on l'a vu sur les deux premiers exemples).

Cela permet de dire que f est DSE sur l'intervalle $] -r, r[$.

Ainsi $x \mapsto \exp(x)$ est DSE sur \mathbb{R} , et $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est DSE sur $] -1, 1[$.

II.2 Série de MacLaurin

Définition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} contenant 0, et f une application de Ω dans \mathbb{K} .

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^∞ à l'origine.

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) t^n$ est appelée *série de MacLaurin* de f .

Proposition (*Caractère nécessaire de la série de MacLaurin*)

Si f est DSE en 0, alors f est de classe \mathcal{C}^∞ à l'origine.

La série entière égale à f au voisinage de 0 est nécessairement la série de MacLaurin de f .

Autrement dit, il existe un réel $r > 0$ tel que sur $] -r, r[: f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) t^n$.

Remarque (*Caractère non suffisant de la série de MacLaurin*)

Même si f est de classe \mathcal{C}^∞ à l'origine, et même si la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut pas affirmer que f est DSE en 0.

Le contre-exemple classique est fourni par l'application $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$.

Proposition (*Une condition suffisante de développement en série entière*)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} contenant 0, et f une application de Ω dans \mathbb{K} .

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^∞ à l'origine.

On suppose d'autre part qu'il existe $r > 0$ et $M \geq 0$ tels que :

$$\forall x \in] -r, r[, \forall p \in \mathbb{N}, |f^{(p)}(x)| \leq M.$$

Alors f est DSE en 0, avec un rayon de convergence au moins égal à r .

Remarque

Cette condition n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple de $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

II.3 Opérations sur les applications "DSE"

Proposition (*Somme et produit de deux applications DSE*)

Soient f et g deux applications DSE en 0.

- Pour tous scalaires α et β , l'application $\alpha f + \beta g$ est DSE en 0.
- L'application fg est DSE en 0.

Proposition (Composition d'applications DSE)

|| Soient f et g deux applications DSE en 0. Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ est DSE en 0.

Proposition (Inverse d'une applications DSE)

|| Si f est DSE en 0, et si $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est DSE en 0.

Proposition (Dérivées et primitives d'une application DSE)

|| Soit f une application DSE en 0 :

- Les dérivées successives de f sont également DSE en 0.
Le développement de $f^{(p)}$ s'obtient en dérivant p fois celui de f terme à terme.
- Toute primitive F de f est DSE en 0.
Le développement de F s'obtient par intégration terme à terme de celui de f .

II.4 Développements usuels

Fonction Exponentielle

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$
- $\forall a > 0, \quad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n(a)}{n!} x^n \quad (R = +\infty)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} x^n \quad (R = +\infty)$

Fonctions trigonométriques directes

- En prenant la partie réelle de $\exp(ix)$: $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie imaginaire de $\exp(ix)$: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie paire de $\exp(x)$: $\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie impaire de $\exp(x)$: $\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$

Développement de $(1+x)^\alpha$ et cas particuliers

– Ce développement est obtenu en utilisant l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$, qui est vérifiée par l'application $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (R=1).$$

– Avec le cas particulier $\alpha = 1$: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (R=1).$

– Après le changement $x \mapsto -x$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (R=1).$

Logarithme népérien

Le développement de $\ln(1+x)$ peut être obtenu par primitivation :

$$\begin{aligned} - \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (R=1). \end{aligned}$$

Le développement précédent est encore valable si $x = 1$.

– Après le changement $x \mapsto -x$: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (R=1).$

Le développement précédent est encore valable si $x = -1$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Les deux développements suivants sont obtenus par primitivation.

$$- \arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si $x = \pm 1$.

$$\begin{aligned} - \arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1). \end{aligned}$$

Le développement précédent est encore valable si $x = \pm 1$.

Fraction rationnelles

$$- \forall a \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} \quad (R=|a|).$$



- Après $p - 1$ dérivations du développement précédent par rapport à x :

$$\forall a \in \mathbb{C}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(a-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^{p-1} \frac{x^n}{a^{n+p}} \quad (R = |a|).$$

- Si f est une fraction rationnelle, n'admettant pas 0 pour pôle, alors f est *DSE* en 0, le rayon de convergence du développement étant le plus petit module d'un pôle de f .