



Séries de Fourier

Sommaire

I	Coefficients de Fourier	2
I.1	L'espace vectoriel $E[2\pi]$	2
I.2	L'espace préhilbertien $C[2\pi]$	2
I.3	Polynômes trigonométriques	3
I.4	Coefficients de Fourier exponentiels	3
I.5	Coefficients de Fourier trigonométriques	4
II	Propriétés des coefficients de Fourier	6
II.1	Propriétés élémentaires	6
II.2	Inégalité de Bessel et conséquences	6
II.3	Coefficients de Fourier des applications dérivées	7
II.4	Egalité de Parseval	8
III	Développements en série de Fourier	9
III.1	Position du problème	9
III.2	Les deux théorèmes de convergence	9
III.3	Généralisation aux applications T-périodiques	10

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Coefficients de Fourier

I.1 L'espace vectoriel $\mathcal{E}[2\pi]$

Notation

On note $\mathcal{E}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications f définies sur \mathbb{R} et à valeurs complexes, qui sont continues par morceaux et 2π -périodiques.

Remarques

- Tout f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque segment, en particulier sur $[-\pi, \pi]$.
- Les éventuelles discontinuités de f sont toutes de *première espèce* : autrement dit, en tout point t , les limites à gauche et à droite $f(t-)$ et $f(t+)$ existent dans \mathbb{C} .
- Toute application f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ est bornée sur \mathbb{R} .

Définition

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}_{2\pi}$, on pose $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$.

Propriétés

- L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais ce n'est pas un produit scalaire car $\langle f, f \rangle = 0$ n'implique pas $f = 0$.

En fait : $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ en tout point de continuité de f (à l'exception donc d'un nombre fini de points sur chaque segment).

- De par la périodicité : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$.

En particulier : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$.

I.2 L'espace préhilbertien $\mathcal{C}[2\pi]$

Définition (Régularisée d'une application de $\mathcal{E}_{2\pi}$)

La régularisée \tilde{f} d'un élément f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ de f est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.

En particulier $\tilde{f}(t) = f(t)$ en tout point de continuité de f .

Notations

- On notera $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ le sous-espace de $\mathcal{E}_{2\pi}$ des applications qui sont leur propre régularisée. Les éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ sont donc les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodiques, continues par morceaux et telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.
- On notera $\mathcal{C}_{2\pi}$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ donc de $\mathcal{E}_{2\pi}$ formé des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} qui sont 2π -périodiques et continues.

Remarques

- On ne change pas la valeur de $\langle f, g \rangle$ si on remplace f ou g par sa régularisée.
- Si f est un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.

L'application $(f, g) \rightarrow \langle f, g \rangle$ est donc un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ et sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

- La norme associée est définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}, \|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

On l'appelle la *norme quadratique*. On note encore $\|f\|$ pour un élément quelconque de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

I.3 Polynômes trigonométriques

Définition

|| Pour tout entier relatif p , on pose : $\forall t \in \mathbb{R}, e_p(t) = \exp(ipt) = \cos(pt) + i \sin(pt)$.

Proposition

|| La famille $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition

|| On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire finie $P = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_p e_p$.

|| On note \mathcal{P} le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ formé par ces polynômes.

|| Le *degré* du polynôme $P = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_p e_p$ est la valeur maximum de $|p|$ pour laquelle $\lambda_p \neq 0$.

Définition

|| Pour tout entier naturel N , on note \mathcal{P}_N le sous-espace de \mathcal{P} engendré par les $(e_p)_{-N \leq p \leq N}$

c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $P = \sum_{p=-N}^{p=N} \lambda_p e_p$.

|| \mathcal{P}_N est donc l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

Remarques

- \mathcal{P}_N est de dimension $2N + 1$. La famille $(e_p)_{-N \leq p \leq N}$ en constitue une base orthonormale.
- On a $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_N \subset \dots \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{2\pi} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi} \subset \mathcal{E}_{2\pi}$.

L'espace vectoriel \mathcal{P} est la réunion de tous les \mathcal{P}_N .

I.4 Coefficients de Fourier exponentiels

Définition

|| Soit f dans $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout p de \mathbb{Z} , on note $c_p(f) = \langle e_p, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt$.

|| $c_p(f)$ est appelé *coefficient de Fourier exponentiel* d'indice p de f .

Définition (*Polynômes de Fourier d'une application*)

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Pour tout entier naturel N , on pose $S_N(f) = \sum_{p=-N}^N c_p(f)e_p(t) = \sum_{p=-N}^N c_p(f)e^{ipt}$.

Le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est élément de \mathcal{P}_N .

On l'appelle le *polynôme de Fourier* de f , d'indice N .

Interprétation géométrique

Si f est *régulière*, c'est-à-dire vérifie $\tilde{f} = f$, et en particulier si f est continue, on peut utiliser la terminologie propre aux espaces préhilbertiens.

$S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_N des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

C'est donc l'élément de \mathcal{P}_N qui réalise la meilleure approximation *quadratique* de f , c'est-à-dire qui minimise la quantité $\|f - P\|$, pour tous les P de \mathcal{P}_N .

I.5 Coefficients de Fourier trigonométriques

Une nouvelle base de \mathcal{P}_N

– Les applications $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ sont des polynômes trigonométriques.

Plus précisément : $\cos(nt) = \frac{1}{2}(e_n(t) + e_{-n}(t))$, et $\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e_n(t) - e_{-n}(t))$.

Inversement : $e_n(t) = \cos(nt) + i \sin(nt)$, et $e_{-n}(t) = \cos(nt) - i \sin(nt)$.

– Pour tout N , $\{1, \cos(t), \dots, \cos(Nt), \sin(t), \dots, \sin(Nt)\}$ est une base de \mathcal{P}_N .

Cette base est orthogonale, mais n'est pas orthonormée.

En fait : $\|1\| = \|e_0\| = 1$, mais $\forall n \geq 1 : \|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Une nouvelle écriture de $S_N(f)$

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, et N un entier naturel.

Le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{p=-N}^N c_p(f)e_p(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^N c_n(f)e_n(t) + \sum_{n=1}^N c_{-n}(f)e_{-n}(t) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N c_n(f)(\cos(nt) + i \sin(nt)) + \sum_{n=1}^N c_{-n}(f)(\cos(nt) - i \sin(nt)) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nt) + \sum_{n=1}^N i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nt). \end{aligned}$$

Définition (*Coefficients de Fourier trigonométriques*)

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$- a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \langle e^{int} + e^{-int}, f \rangle = \langle 2 \cos(nt), f \rangle.$$

$$- b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i \langle e^{int} - e^{-int}, f \rangle = \langle 2 \sin(nt), f \rangle.$$

$$\text{Autrement dit : } a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

On constate en particulier que $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés *coefficients de Fourier trigonométriques* de f .

Conclusion

Avec ces définitions, le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$S_N(f) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^N b_n(f) \sin(nt).$$

Remarques

- On n'oubliera pas le coefficient $\frac{1}{2}$ devant $a_0(f)$. C'est une source d'erreurs mais c'est le prix à payer pour que tous les a_n obéissent à la même définition.
- Si l'application f est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, elle a les mêmes coefficients de Fourier et donc les mêmes polynômes de Fourier que sa régularisée \tilde{f} .

II Propriétés des coefficients de Fourier

II.1 Propriétés élémentaires

Proposition (Linéarité)

|| Les applications $f \mapsto c_p(f)$, $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto b_n(f)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Remarque

Les suites de terme général $c_p(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont bornées. En effet :

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt; \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt; \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Ce résultat peut cependant être nettement amélioré. On verra en effet que ces trois suites convergent vers 0 quand $p \rightarrow \pm\infty$ ou quand $n \rightarrow \infty$.

Proposition (Cas des fonctions réelles)

|| Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, à valeurs réelles.

|| Pour tout entier naturel n , on a :

- $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
- $a_n(f) = 2\operatorname{Re}(c_n(f))$ est réel.
- $b_n(f) = -2\operatorname{Im}(c_n(f))$ est réel.

Proposition (Fonctions paires ou impaires)

|| Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

- Si f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$.

|| On peut alors écrire : $S_N(f) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nt)$.

- Si f est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$.

|| On peut alors écrire : $S_N(f) = \sum_{n=1}^N b_n(f) \sin(nt)$.

II.2 Inégalité de Bessel et conséquences

Proposition (Inégalité de Bessel)

|| Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel N , $\sum_{p=-N}^N |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$.

Interprétation géométrique

Si $\tilde{f} = f$ (notamment si f est continue), cette inégalité s'écrit $\|S_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2$ et vient de ce que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_N .

On a en effet dans ce cas l'égalité :

$$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + d(f, \mathcal{P}_N)^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2.$$

Conséquence

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Les séries $\sum_{n \geq 0} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n \geq 0} |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes.

De même, les séries $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n \geq 0} |b_n(f)|^2$ sont convergentes.

On en déduit que $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} c_p(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0$.

Remarque

On vérifiera toujours que les coefficients de Fourier calculés tendent vers 0...

II.3 Coefficients de Fourier des applications dérivées

Proposition

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. On suppose que f est continue, et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Ainsi l'application dérivée f' est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Dans ces conditions, pour tout entier relatif p , on a l'égalité : $c_p(f') = ip c_p(f)$.

Conséquence

Avec ces hypothèses $c_p(f) = o\left(\frac{1}{p}\right)$ quand $p \rightarrow \pm\infty$, et $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Généralisation

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^{k-1} sur \mathbb{R} , et de classe \mathcal{C}^k par morceaux.

Alors pour tout entier relatif p : $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k c_p(f)$.

On en déduit que quand p tend vers $\pm\infty$, ou quand n tend vers ∞ :

$$c_p(f) = o\left(\frac{1}{p^k}\right), \quad a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Remarque

Ainsi, plus f est dérivable, plus rapidement ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

II.4 Égalité de Parseval

Théorème

Soit f un élément de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$, et notamment de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

La suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique. On parle de convergence en *moyenne quadratique*.

Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 dt = 0$.

Sous cette forme, le résultat est encore valable si f appartient à $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Proposition (Égalité de Parseval)

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

La suite de terme général $\|S_N(f)\| = \sum_{p=-N}^{p=N} |c_p(f)|^2$ converge vers $\|f\|^2$.

On en déduit l'égalité de Parseval : $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

Conséquence

Si deux fonctions f et g de $\mathcal{E}_{2\pi}$ ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales sur \mathbb{R} sauf peut-être en leurs éventuels points de discontinuité.

Dit autrement, elles ont la même régularisée.

Autre forme de l'égalité de Parseval

On se souvient que $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$. Donc $|c_0(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4}$.

On vérifie que pour tout $n \geq 1$: $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$.

On en déduit l'égalité de Parseval exprimée à l'aide des coefficients a_n et b_n :

$$\frac{1}{2} |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 2 \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Remarque

L'égalité de Parseval sert surtout à calculer des sommes de séries qui sans cela seraient assez

difficiles à obtenir. On peut ainsi calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

III Développements en série de Fourier

III.1 Position du problème

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On sait que la suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers f , mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire $f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(t)$?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f) e^{ipt} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de f .

En cas de convergence, et si la somme est bien f , on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que f est *développable en série de Fourier*.

III.2 Les deux théorèmes de convergence

Théorème de Dirichlet

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Alors la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} , vers la régularisée \tilde{f} de f .

Autrement dit, on a pour tout t de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point t où l'application f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

Théorème de convergence normale

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On suppose que f est *continue* et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Alors les séries $\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f)$, $\sum_{n \geq 0} a_n(f)$ et $\sum_{n \geq 0} b_n(f)$ sont absolument convergentes.

Dans ces conditions, la série de Fourier de f est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout \mathbb{R} , vers la fonction f .

III.3 Généralisation aux applications T -périodiques

Si on considère des applications T -périodiques, les notations deviennent, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

– Produit scalaire et norme

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

– Coefficients de Fourier

$$c_p(f) = \langle e_p, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-ip\omega t) dt.$$

$$a_n(f) = \langle 2 \cos(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

$$b_n(f) = \langle 2 \sin(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

– Série de Fourier

La série de Fourier de f s'écrit maintenant :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ip\omega t} = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.