I Coefficients de Fourier

I.1 L'espace vectoriel E[2pi]

Notation

On note $\mathcal{E}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, qui sont continues par morceaux et 2π-périodiques.

Remarques

- Tout f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque segment, en particulier sur $[-\pi, \pi]$.
- Les éventuelles discontinuités de f sont toutes de *première espèce* : autrement dit, en tout point t, les limites à gauche et à droite $f(t-)$ et $f(t+)$ existent dans $\mathbb{C}$.
- Toute application f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}_{2\pi}$, on pose $< f, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

Propriétés

- L'application $(f, g) \mapsto < f, g >$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais ce n'est pas un produit scalaire car $< f, f >=0$ n'implique pas $f = 0$.

  En fait : $< f, f > = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ en tout point de continuité de f (à l'exception donc d'un nombre fini de points sur chaque segment).
- De par la périodicité : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, < f, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}\, t.$

  En particulier : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, < f, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}\, t.$

I.2 L'espace préhilbertien C[2pi]

Définition *(Régularisée d'une application de $\mathcal{E}_{2\pi}$)*

La *régularisée* $\tilde{f}$ d'un élément f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ de f est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = \dfrac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.
En particulier $\tilde{f}(t) = f(t)$ en tout point de continuité de f.

Notations

- On notera $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ le sous-espace de $\mathcal{E}_{2\pi}$ des applications qui sont leur propre régularisée.
  Les éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ sont donc les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux et telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.
- On notera $\mathcal{C}_{2\pi}$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ donc de $\mathcal{E}_{2\pi}$ formé des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et *continues*.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques

– On ne change pas la valeur de $< f, g >$ si on remplace f ou g par sa régularisée.

– Si f est un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, $< f, f > = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.

L'application $(f, g) \to < f, g >$ est donc un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ et sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

– La norme associée est définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}, \|f\| = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t\right)^{1/2}$.

On l'appelle la *norme quadratique*. On note encore $\|f\|$ pour un élément quelconque de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

I.3 Polynômes trigonométriques

Définition

Pour tout entier relatif p, on pose : $\forall t \in \mathbb{R}, e_p(t) = \exp(ipt) = \cos(pt) + i\sin(pt)$.

Proposition

La famille $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition

On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire finie $P = \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda_p\, e_p$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ formé par ces polynômes.

Le *degré* du polynôme $P = \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda_p\, e_p$ est la valeur maximum de $|p|$ pour laquelle $\lambda_p \neq 0$.

Définition

Pour tout entier naturel N, on note $\mathcal{P}_N$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ engendré par les $(e_p)_{-N\leq p\leq N}$ c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $P = \displaystyle\sum_{p=-N}^{p=N} \lambda_p\, e_p$.

$\mathcal{P}_N$ est donc l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

Remarques

– $\mathcal{P}_N$ est de dimension $2N+1$. La famille $(e_p)_{-N\leq p\leq N}$ en constitue une base orthonormale.

– On a $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_N \subset \cdots \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{2\pi} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi} \subset \mathcal{E}_{2\pi}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est la réunion de tous les $\mathcal{P}_N$.

I.4 Coefficients de Fourier exponentiels

Définition

Soit f dans $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout p de $\mathbb{Z}$, on note $c_p(f) = < e_p, f > = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}\,t$.

$c_p(f)$ est appelé *coefficient de Fourier exponentiel* d'indice p de f.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition *(Polynômes de Fourier d'une application)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Pour tout entier naturel N, on pose $S_N(f) = \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)e_p(t) = \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt}$.

Le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est élément de $\mathcal{P}_N$.

On l'appelle le *polynôme de Fourier* de f, d'indice N.

Interprétation géométrique

Si f est *régulière*, c'est-à-dire vérifie $\tilde{f} = f$, et en particulier si f est continue, on peut utiliser la terminologie propre aux espaces préhilbertiens.

$S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_N$ des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

C'est donc l'élément de $\mathcal{P}_N$ qui réalise la meilleure approximation *quadratique* de f, c'est-à-dire qui minimise la quantité $\|f - P\|$, pour tous les P de $\mathcal{P}_N$.

I.5 Coefficients de Fourier trigonométriques

Une nouvelle base de $\mathcal{P}_N$

– Les applications $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ sont des polynômes trigonométriques.

Plus précisément : $\cos(nt) = \dfrac{1}{2}(e_n(t) + e_{-n}(t))$, et $\sin(nt) = \dfrac{1}{2i}(e_n(t) - e_{-n}(t))$.

Inversement : $e_n(t) = \cos(nt) + i\sin(nt)$, et $e_{-n}(t) = \cos(nt) - i\sin(nt)$.

– Pour tout N, $\{1, \cos(t), \ldots, \cos(Nt), \sin(t), \ldots, \sin(Nt)\}$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

Cette base est orthogonale, mais n'est pas orthonormée.

En fait : $\|1\| = \|e_0\| = 1$, mais $\forall n \geq 1 : \|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Une nouvelle écriture de $S_N(f)$

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, et N un entier naturel.

Le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)e_p(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)e_n(t) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)e_{-n}(t) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)(\cos(nt) + i\sin(nt)) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)(\cos(nt) - i\sin(nt)) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} (c_n(f) + c_{-n}(f))\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} i(c_n(f) - c_{-n}(f))\sin(nt). \end{aligned}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition *(Coefficients de Fourier trigonométriques)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel n, on pose :
- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = < \mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int}, f > = < 2\cos(nt), f >$.
- $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i < \mathrm{e}^{int} - \mathrm{e}^{-int}, f > = < 2\sin(nt), f >$.

Autrement dit : $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\mathrm{d}t$.

On constate en particulier que $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés *coefficients de Fourier trigonométriques* de f.

Conclusion

Avec ces définitions, le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$S_N(f) = \frac{1}{2}\,a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt).$$

Remarques

- On n'oubliera pas le coefficient $\dfrac{1}{2}$ devant $a_0(f)$. C'est une source d'erreurs mais c'est le prix à payer pour que tous les a_n obéissent à la même définition.
- Si l'application f est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, elle a les mêmes coefficients de Fourier et donc les mêmes polynômes de Fourier que sa régularisée $\tilde{f}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021