II Propriétés des coefficients de Fourier

II.1 Propriétés élémentaires

Proposition *(Linéarité)*

Les applications $f \mapsto c_p(f)$, $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto c_n(f)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Remarque

Les suites de terme général $c_p(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont bornées. En effet :

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ce résultat peut cependant être nettement amélioré. On verra en effet que ces trois suites convergent vers 0 quand $p \to \pm\infty$ ou quand $n \to \infty$.

Proposition *(Cas des fonctions réelles)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, à valeurs réelles.

Pour tout entier naturel n, on a :
- $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
- $a_n(f) = 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{c_n(f)})$ est réel.
- $b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f))$ est réel.

Proposition *(Fonctions paires ou impaires)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
- Si f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$.

  On peut alors écrire : $S_N(f) = \dfrac{1}{2}a_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt)$.
- Si f est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

  On peut alors écrire : $S_N(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt)$.

II.2 Inégalité de Bessel et conséquences

Proposition *(Inégalité de Bessel)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{p=-N}^{N} |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Interprétation géométrique

Si $\tilde{f} = f$ (notamment si f est continue), cette inégalité s'écrit $\|S_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2$ et vient de ce que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_N$.

On a en effet dans ce cas l'égalité :

$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + \mathrm{d}(f, \mathcal{P}_N)^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2$.

Conséquence

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Les séries $\sum_{n\geq 0} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 0} |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes.

De même, les séries $\sum_{n\geq 0} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 0} |b_n(f)|^2$ sont convergentes.

On en déduit que $\lim_{p\to\pm\infty} c_p(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$.

Remarque

On vérifiera toujours que les coefficients de Fourier calculés tendent vers 0...

II.3 Coefficients de Fourier des applications dérivées

Proposition

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. On suppose que f est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Ainsi l'application dérivée f' est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
Dans ces conditions, pour tout entier relatif p, on a l'égalité : $c_p(f') = ip\, c_p(f)$.

Conséquence

Avec ces hypothèses $c_p(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{p}\right)$ quand $p \to \pm\infty$, et $a_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Généralisation

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.
Alors pour tout entier relatif p : $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k\, c_p(f)$.
On en déduit que quand p tend vers $\pm\infty$, ou quand n tend vers ∞ :

$c_p(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{p^k}\right)$, $\quad a_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)$ $\quad$ et $\quad b_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Remarque

Ainsi, plus f est dérivable, plus rapidement ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.4 Egalité de Parseval

Théorème

Soit f un élément de $\tilde{E}_{2\pi}$, et notamment de $\mathcal{C}_{2\pi}$.
La suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique. On parle de convergence en *moyenne quadratique*.
Autrement dit : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$.
Sous cette forme, le résultat est encore valable si f appartient à $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Proposition *(Égalité de Parseval)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
La suite de terme général $\|S_N(f)\| = \sum\limits_{p=-N}^{p=N} |c_p(f)|^2$ converge vers $\|f\|^2$.
On en déduit l'*égalité de Parseval* : $\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} |c_p(f)|^2 = \|f\|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t$

Conséquence

Si deux fonctions f et g de $\mathcal{E}_{2\pi}$ ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en leurs éventuels points de discontinuité.

Dit autrement, elles ont la même régularisée.

Autre forme de l'égalité de Parseval

On se souvient que $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$. Donc $|c_0(f)|^2 = \dfrac{|a_0(f)|^2}{4}$.

On vérifie que pour tout $n \geq 1$: $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$.

On en déduit l'égalité de Parseval exprimée à l'aide des coefficients a_n et b_n :

$$\frac{1}{2}\,|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 2\,\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Remarque

L'égalité de Parseval sert surtout à calculer des sommes de séries qui sans cela seraient assez difficiles à obtenir. On peut ainsi calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021