# III Développements en série de Fourier

## III.1 Position du problème

Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On sait que la suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de $f$ converge vers $f$ au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers $f$, mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire $f(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(t)$ ?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de $f$.

En cas de convergence, et si la somme est bien $f$, on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que $f$ est *développable en série de Fourier*.

## III.2 Les deux théorèmes de convergence

### Théorème de Dirichlet

Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors la série de Fourier de $f$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers la régularisée $\tilde{f}$ de $f$.
Autrement dit, on a pour tout $t$ de $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point $t$ où l'application $f$ est continue, la somme de la série de Fourier de $f$ est égale à $f(t)$.

**Théorème de convergence normale**

Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
On suppose que $f$ est *continue* et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors les séries $\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)$, $\sum_{n\geq 0} a_n(f)$ et $\sum_{n\geq 0} b_n(f)$ sont absolument convergentes.
Dans ces conditions, la série de Fourier de $f$ est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout $\mathbb{R}$, vers la fonction $f$.

## III.3 Généralisation aux applications T-périodiques

Si on considère des applications $T$-périodiques, les notations deviennent, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ :

- **Produit scalaire et norme**

$$< f, g > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)}\, g(t)\mathrm{d}t, \qquad \|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

- **Coefficients de Fourier**

$$c_p(f) = < e_p, f > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \exp(-ip\omega t)\, \mathrm{d}t.$$

$$a_n(f) = < 2\cos(n\omega t), f > = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \cos(n\omega t)\, \mathrm{d}t.$$

$$b_n(f) = < 2\sin(n\omega t), f > = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \sin(n\omega t)\, \mathrm{d}t.$$

- **Série de Fourier**

La série de Fourier de $f$ s'écrit maintenant :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ip\omega t} = \frac{1}{2}\, a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.