II Séries à termes positifs

Remarques

- Les hypothèses $u_n \geq 0$ ou $u_n \leq v_n$ ci-dessous, vraies à priori pour tout n de $\mathbb{N}$, peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang n_0 : les résultats sur la *nature* des séries (pas sur leur *valeur*) restent valables.
- Compte tenu du fait que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(-u_n)$ sont de même nature, les énoncés suivants s'appliquent aussi, avec des modifications évidentes, au cas des séries réelles dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.
- Les propriétés des séries à termes positifs sont très utiles pour étudier la convergence absolue de séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition *(Convergence par majoration des sommes partielles)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ la suite (S_N) de ses sommes partielles, qui est croissante, est majorée.

En cas de convergence, on a l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{N\geq 0}(S_N)$

Proposition *(Convergence par domination)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

- Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.
- Par conséquent, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

  Dans ce cas, on a alors : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=N}^{\infty} v_n$.

Proposition *(Convergence par équivalence ou par prépondérance)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque

Dans la proposition "$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature", il est essentiel que les termes généraux u_n et v_n gardent un signe constant quand $n \to \infty$.

Exemple : avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1+u_n)$.

On a $u_n \sim v_n$ mais $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Proposition *(Sommation des relations de comparaison)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Notons S_N et S'_N les sommes partielles des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

De même notons R_N et R'_N les restes d'ordre N.

En cas de convergence des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, on a :

- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors $R_N = \mathrm{o}(R'_N)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $R_N \sim R'_N$.

En cas de divergence des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, on a :

- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors $S_N = \mathrm{o}(S'_N)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $S_N \sim S'_N$.

Proposition *(Séries de référence)*

- *Séries de Riemann* : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- *Séries de Bertrand* : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$

Proposition *(Utilisation des séries de référence de Riemann)*

- S'il existe $\alpha > 1$ et $M \geq 0$ tels que $0 \leq n^\alpha u_n \leq M$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

  C'est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, ce qu'on peut traduire par $u_n = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^\alpha})$.
- S'il existe $M > 0$ tel que $nu_n \geq M$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

  C'est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \lambda > 0$ c'est-à-dire si $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$.

Proposition *(Règles de d'Alembert)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

- Si $0 \leq \alpha < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
- Si $\alpha = 1$ on ne peut rien dire : c'est le cas *douteux* de la règle de d'Alembert.

  Toutefois, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.