II Séries à termes positifs

Remarques

– Les hypothèses $u_n \geq 0$ ou $u_n \leq v_n$ ci-dessous, vraies à priori pour tout n de $\mathbb{N}$, peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang n_0 : les résultats sur la *nature* des séries (pas sur leur *valeur*) restent valables.

– Compte tenu du fait que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0}(-u_n)$ sont de même nature, les énoncés suivants s'appliquent aussi, avec des modifications évidentes, au cas des séries réelles dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.

– Les propriétés des séries à termes positifs sont très utiles pour étudier la convergence absolue de séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition *(Convergence par majoration des sommes partielles)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ la suite (S_N) de ses sommes partielles, qui est croissante, est majorée.

En cas de convergence, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{N\geq 0}(S_N)$

Proposition *(Convergence par domination)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

– Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

– Par conséquent, si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Dans ce cas, on a alors : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=N}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} v_n$.

Proposition *(Convergence par équivalence ou par prépondérance)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Si $u_n = O(v_n)$ et si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque

Dans la proposition "$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature", il est essentiel que les termes généraux u_n et v_n gardent un signe constant quand $n \to \infty$.

Exemple : avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1+u_n)$.

On a $u_n \sim v_n$ mais $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Sommation des relations de comparaison)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Notons S_N et S'_N les sommes partielles des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

De même notons R_N et R'_N les restes d'ordre N.

En cas de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, on a :

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $R_N = o(R'_N)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $R_N \sim R'_N$.

En cas de divergence des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, on a :

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $S_N = o(S'_N)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $S_N \sim S'_N$.

Proposition *(Séries de référence)*

- *Séries de Riemann* : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- *Séries de Bertrand* : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$

Proposition *(Utilisation des séries de référence de Riemann)*

- S'il existe $\alpha > 1$ et $M \geq 0$ tels que $0 \leq n^\alpha u_n \leq M$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

  C'est le cas notamment si $\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, ce qu'on peut traduire par $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$.
- S'il existe $M > 0$ tel que $nu_n \geq M$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

  C'est le cas notamment si $\lim_{n\to\infty} nu_n = \lambda > 0$ c'est-à-dire si $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$.

Proposition *(Règles de d'Alembert)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

- Si $0 \leq \alpha < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
- Si $\alpha = 1$ on ne peut rien dire : c'est le cas *douteux* de la règle de d'Alembert.

  Toutefois, si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021